
Examen mi-semestre

NOM : PRENOM :

Numéro SCIPER :

Problème 1: Equation aux différences

Un système LTI stable est décrit par l'équation aux différences suivante:

$$y[n] - 0.3y[n-1] - 0.4y[n-2] = x[n] - 2.1x[n-1]$$

- a) Calculez la réponse fréquentielle du système $H(\omega)$.
- b) Calculez la réponse impulsionnelle du système $h[n]$.

Solution

- a) En appliquant les propriétés de décalage dans le temps et de linéarité de la DTFT, on obtient
$$Y(\omega)(1 - 0.3e^{-j\omega} - 0.4e^{-2j\omega}) = X(\omega)(1 - 2.1e^{-j\omega})$$

En utilisant la relation $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$, on obtient la réponse fréquentielle

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1 - 2.1e^{-j\omega}}{(1 - 0.3e^{-j\omega} - 0.4e^{-2j\omega})} \\ &= \frac{1 - 2.1e^{-j\omega}}{(1 + 0.5e^{-j\omega})(1 - 0.8e^{-j\omega})} \\ &= \frac{A}{(1 + 0.5e^{-j\omega})} + \frac{B}{(1 - 0.8e^{-j\omega})} \end{aligned}$$

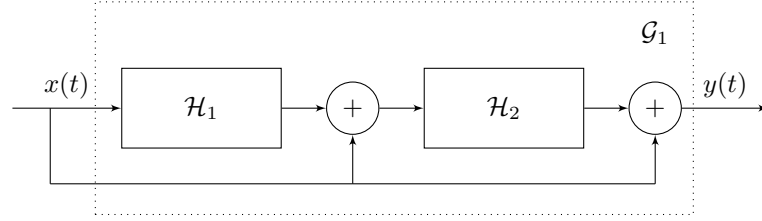
Après une décomposition en fractions simples, on obtient que $A = 2$ et $B = -1$ et donc que

$$H(\omega) = \frac{2}{(1 + 0.5e^{-j\omega})} - \frac{1}{(1 - 0.8e^{-j\omega})}$$

- b) En utilisant la propriété de l'exponentielle unilatérale de l'annexe 4D, on obtient la réponse impulsionnelle $h[n]$
$$h[n] = 2(-0.5)^n u[n] - (0.8)^n u[n]$$

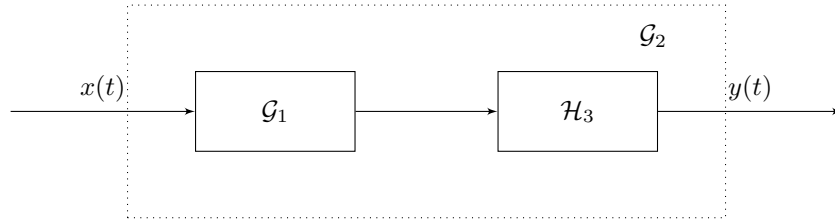
Problème 2: Composition de systèmes

- (a) Considérez le système LTI $\mathcal{G}_1$ suivant, qui est une composition des systèmes LTI $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$.



- Quelle est la réponse impulsionnelle $g_1(t)$ de $\mathcal{G}_1$, en fonction de $h_1(t)$ et $h_2(t)$, les réponses impulsionnelles des systèmes $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ respectivement?
- Considérez les fonctions $h_1(t) = -\delta(t - T)$ et $h_2(t) = 2^t \delta(t - 2T)$, $0 < T < \infty$. Explicitez la réponse impulsionnelle $g_1(t)$.
- Le système $\mathcal{G}_1$ est-il causal? Justifiez.

- (b) Nous considérons le nouveau système $\mathcal{G}_2$ suivant.



- Exprimez la nouvelle réponse impulsionnelle $g_2(t)$ de $\mathcal{G}_2$ en fonction de la réponse impulsionnelle $h_3(t)$ du système $\mathcal{H}_3$, en considérant la réponse impulsionnelle $g_1(t)$ du système $\mathcal{G}_1$ trouvée en réponse à la question a(ii).
 - Sachant que $\mathcal{H}_3$ est un système causal, $\mathcal{G}_2$ est-il forcément causal? Justifiez.
 - Sachant que $\mathcal{H}_3$ est un système stable, tel que $\int_{-\infty}^{\infty} |h_3(t)| dt < B < \infty$. Prouvez que $\mathcal{G}_2$ est forcément stable en trouvant une constante $C < \infty$ telle que $\int_{-\infty}^{\infty} |g_2(t)| dt < C$.
 - Calculez la nouvelle réponse impulsionnelle $g_2(t)$ pour $h_3(t) = u(t)$, où $u(t)$ est la fonction de Heaviside.
- (c) Supposons finalement que $T = 0$ et prenons le signal d'entrée $x(t) = 24t^2(u(t+1) - u(t-1))$. Soit $y(t)$ la sortie du système $\mathcal{G}_2$ pour une entrée $x(t)$. Nous considérons l'approximation du signal $y(t)$, notée $\hat{y}(t)$. Elle est construite en interpolant linéairement la fonction $y(t)$ entre les points suivants : $(-1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5)$.
- Dessinez le signal $g_2(t)$ sur l'intervalle $t \in [-1.5, 1.5]$.
 - Dessinez le signal $x(t)$ sur l'intervalle $t \in [-1.5, 1.5]$.
 - Soit $A = \int_0^{1/2} 24\tau^2 d\tau$ et $B = \int_{1/2}^1 24\tau^2 d\tau$, calculez A et B.
 - En vous basant sur vos réponses aux points précédents, et en utilisant la méthode de la convolution graphique, dessinez la fonction $\hat{y}(t)$.

Solution

- (a) (a-i) $h(t) = ((h_1(t) * \delta(t)) + \delta(t)) * h_2(t) + \delta(t) = (h_1 * h_2)(t) + h_2(t) + \delta(t)$.
(a-ii) On remarque que $h_2(t) = 2^t(\delta(t - 2T)) = 4^T\delta(t - 2T)$ et donc $g_1(t) = -4^T\delta(t - 3T) + 4^T\delta(t - 2T) + \delta(t)$.
(a-iii) Le système est causal car $T > 0$.

- (b) (b-i) La forme générale devient $g_2(t) = (g_1 * h_3)(t) = 4^T(h_3(t - 2T) - h_3(t - 3T)) + h_3(t)$.
(b-ii) Oui le système est causal pour tout système $\mathcal{H}_3$ causal. Preuve: Sachant que $h_3(t) = 0, \forall t < 0$ et que $T_i > 0$ alors $h_3(t - T_i) = 0, \forall t < 0 < T_i$, nous avons donc une somme de signaux causaux qui est nécessairement causale.
(b-iii) Le système $\mathcal{G}_2$ est stable pour tout système $\mathcal{H}_3$ et $T < \infty$. Preuve: Sachant que $\int |h_3(t)|dt < B$, on a donc:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_2(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |4^T(h_3(t - 2T) - h_3(t - 3T)) + h_3(t)|dt \quad (1)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} 4^T|h_3(t - 2T) - h_3(t - 3T)|dt + \int_{-\infty}^{\infty} |h_3(t)|dt \quad (2)$$

$$\leq 4^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h_3(t - 2T)|dt + \int_{-\infty}^{\infty} |h_3(t - 3T)|dt \right) + \int_{-\infty}^{\infty} |h_3(t)|dt \quad (3)$$

$$\leq (4^{T+0.5} + 1)B < \infty \quad (4)$$

En appliquant deux fois l'inégalité du triangle.

- (b-iv) On remplace simplement $h_3(t)$ par la fonction de Heaviside dans la formule (c-i): $g_2(t) = 4^T(u(t - 2T) - u(t - 3T)) + u(t)$.

- (c) (c-i) - (c-ii) pour $T = 0$, $g_2(t) = u(t)$. Pour les dessins voir figure 1.

- (c-iii) $A = \int_0^{1/2} 24\tau^2 d\tau = 8\tau^3|_0^{1/2} = 1$ et $B = \int_{1/2}^1 24\tau^2 d\tau = 8\tau^3|_{1/2}^1 = 8 - 1 = 7$.

- (c-iv) Il suffit de cumuler les portions d'air A et B pour trouver les valeurs en chaque point, puis d'interpoler linéairement entre les points, voir figure 1.

Remarque: vérification analytique

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (5)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 24\tau^2(u(\tau + 1) - u(\tau - 1))u(t - \tau)d\tau \quad (6)$$

$$= \int_{-\infty}^t 24\tau^2(u(\tau + 1) - u(\tau - 1))d\tau \quad (7)$$

$$(8)$$

Et ainsi on peut distinguer 3 cas de figure en fonction de t:

$$t \leq -1 : y(t) = 0 \quad (9)$$

$$t \geq 1 : y(t) = \int_{-1}^1 24\tau^2 d\tau = 8\tau^3|_{-1}^1 = 8 - (-8) = 16 \quad (10)$$

$$-1 < t < 1 : y(t) = \int_{-1}^t 24\tau^2 d\tau \quad (11)$$

$$(12)$$

Nous cherchons les valeurs de $y(t)$ en $t=-1.5$, $t=-1$, $t = -1/2$, $t = 0$, $t= 1/2$, $t = 1$ et $t=1.5$:

$$t = -1/2 : y(t) = 8\tau^3|_{-1}^{-1/2} = -1 - (-8) = 7 \quad (13)$$

$$t = 0 : y(t) = 8\tau^3|_{-1}^0 = 8 \quad (14)$$

$$t = 1/2 : y(t) = 8\tau^3|_{-1}^{1/2} = 1 - (-8) = 9 \quad (15)$$

$$(16)$$

L'interpolation linéaire entre ces points nous donne la réponse.

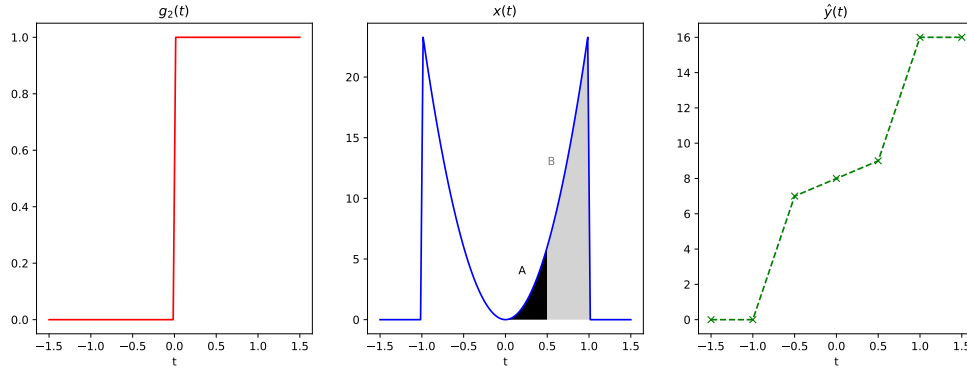


Figure 1 : Solution (2-d)

Problème 3: Équation différentielle

Soit le système décrit par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\pi}{2} \frac{dy(t)}{dt} = x(t - \pi) - x(t)$$

a) Trouvez la réponse fréquentielle du système.

b) En déduire la réponse impulsionnelle et faire une esquisse de la réponse impulsionnelle.

Indice: Rappelez-vous que $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$

c) Est-ce que le système est causal? Justifiez.

Solution

a) Pour trouver la réponse fréquentielle il faut passer dans le domaine de Fourier, nous avons alors l'équation:

$$\frac{\pi}{2} j\omega Y(\omega) = X(\omega)(e^{-j\pi\omega} - 1)$$

On trouve alors $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{e^{-j\pi\omega} - 1}{j\frac{\pi}{2}\omega} = e^{-j\frac{\pi}{2}\omega} \frac{(e^{-j\frac{\pi}{2}\omega} - e^{j\frac{\pi}{2}\omega})}{j\frac{\pi}{2}\omega} = -2e^{-j\frac{\pi}{2}\omega} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

b) Pour obtenir la réponse impulsionnelle, il suffit de se reporter à la paire de transformée de Fourier pour la fonction sinc, dans ce cas-ci nous avons $t_0 = \pi$ et la réponse fréquentielle est de la forme:

$$H(\omega) = -\frac{2}{\sqrt{t_0}} e^{-j\frac{\pi}{2}\omega} \left(\sqrt{t_0} \text{sinc}\left(\frac{t_0}{2\pi}\omega\right) \right)$$

Ce qui donne en temporelle:

$$h(t) = \mathcal{H}(\delta(t)) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}, & |t - \frac{\pi}{2}| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement, nous obtenons la figure 2.

c) Un système LTI est causal si et seulement si la réponse impulsionnelle est identiquement nulle pour les retards négatifs: $h(t) = 0$ pour $t < 0$.

Comme on peut le voir, $h(t) = 0$ pour $t < 0$. Le système est causal.

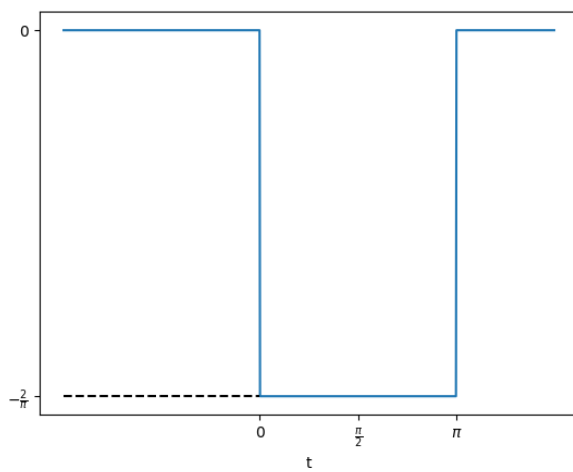


Figure 2: Esquisse de la réponse impulsionnelle.