Corrigé 6

Exercice 1.

a) Cette affirmation est fausse. En effet, si on prend $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 2$, le produit $h(x)$ est égal à $h(x) = 2x^2 + 2$ qui est de degré 2. Comme le degré de $f(x)$ est 2 et celui de $g(x)$ est 0, Le degré de $h(x)$ est bien supérieur à celui de $g(x)$, mais n'est pas supérieur à celui de $f(x)$.
En fait, on a $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$ (cela découle de la définition du degré d'un polynôme et de celle de la multiplication de deux polynômes). Pour inclure le cas où un des polynômes est le polynôme nul (avec $\deg(0) = -\infty$), on doit poser $-\infty + n = -\infty$ et $n + (-\infty) = -\infty$ pour n'importe quel $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$.

b) Cette affirmation est fausse. En effet, en prenant cette fois deux polynômes de degré 0, $f(x) = 1$ et $g(x) = 2$, le produit $h(x) = 2$ est de degré 0. Ainsi le degré de $h(x)$ n'est supérieur ni à celui de $f(x)$, ni à celui de $g(x)$.
En fait, on a $\deg(f + g) \le \max\{\deg(f); \deg(g)\}$ (où la fonction max donne le plus grand des éléments d'un ensemble). En effet, l'addition de deux polynômes ne peut pas augmenter leur degré, mais peut le diminuer (notamment si $f(x)$ est non nul et $g(x) = -f(x)$).

c) Cette affirmation est vraie car lorsqu'on divise un polynôme de degré n par un polynôme de degré m, avec $n \ge m$, le quotient sera de degré $n - m$. Donc si $n = m$ alors le quotient sera de degré $n - m$, c'est à dire 0.

Exercice 2.

a) De l'exercice précédent, du fait que $\deg(-r_1) = \deg(r_1)$, et de l'hypothèse sur le degré des r_i, on a

$$\deg(r_2 - r_1) = \deg(r_2 + (-r_1)) \le \max\{\deg(r_2); \deg(-r_1)\} = \max\{\deg(r_2); \deg(r_1)\} < \deg(g).$$

b) Comme $f(x) - f(x) = 0$, l'énoncé permet d'écrire $g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x) - (g(x) \cdot q_2(x) + r_2(x)) = 0$, c'est-à-dire $g(x) \cdot q_1(x) - g(x) \cdot q_2(x) - (r_2(x) - r_1(x)) = 0$. En isolant les $r_i(x)$ et en mettant $g(x)$ en évidence, on obtient bien $g(x) \cdot (q_1(x) - q_2(x)) = r_2(x) - r_1(x)$.
Si $q_1(x) \ne q_2(x)$, alors $q_1(x) - q_2(x) \ne 0$ et $\deg(q_1 - q_2) \ge 0$. Par l'exercice précédent, on a donc

$$\deg(r_2 - r_1) = \deg(g \cdot (q_1 - q_2)) = \deg(g) + \deg(q_1 - q_2) \ge \deg(g) + 0 = \deg(g),$$

qui donne l'inégalité voulue,

c) Supposons que le quotient ou le reste n'est pas unique dans la division de $f(x)$ par $g(x)$. On peut alors écrire l'équation fondamentale de la division de deux manières différentes, comme dans l'énoncé. De plus, comme $g(x) \ne 0$ et $g(x) \cdot (q_1(x) - q_2(x)) = r_2(x) - r_1(x)$, on a

$$q_1(x) = q_2(x) \iff r_1(x) = r_2(x) \qquad \text{(ou de manière équivalente } q_1(x) \ne q_2(x) \iff r_1(x) \ne r_2(x)\text{).}$$

Par hypothèse, on a alors nécessairement $q_1(x) \ne q_2(x)$. Dans ce cas, $\deg(g) \overset{\textbf{b)}}{\le} \deg(r_2 - r_1) \overset{\textbf{a)}}{<} \deg(g)$, c'est-à-dire $\deg(g) < \deg(g)$, une contradiction. Donc $q_1(x) = q_2(x)$, auquel cas $r_1(x) = r_2(x)$. Le quotient et le reste sont bien uniques dans la division de polynômes.

Exercice 3.

a)

$$\begin{array}{rrr|l}
4x^2 & -5x & +1 & 2x \quad -1 \\ \cline{4-4}
-4x^2 & +2x & & 2x \; -\frac{3}{2} \\ \cline{1-2}
 & -3x & & \\
 & 3x & -\frac{3}{2} & \\ \cline{2-3}
 & & -\frac{1}{2} &
\end{array}$$

L'égalité fondamentale de la division est $4x^2 - 5x + 1 = (2x - 1)\left(2x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}$.

b)

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & -x & +12 & x \quad -4 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +4x^2 & & & x^2 \; +4x \; +15 \\ \cline{1-2}
 & 4x^2 & & & \\
 & -4x^2 & +16x & & \\ \cline{2-3}
 & & 15x & & \\
 & & -15x & +60 & \\ \cline{3-4}
 & & & 72 &
\end{array}$$

L'égalité fondamentale de la division est $x^3 - x + 12 = (x - 4)(x^2 + 4x + 15) + 72$.

c)

$$
\begin{array}{rrrrr|lll}
x^4 & -2x^3 & & -7x & +3 & x^2 & +x & +2 \\ \cline{6-8}
-x^4 & -x^3 & -2x^2 & & & x^2 & -3x & +1 \\ \cline{1-3}
 & -3x^3 & -2x^2 & & & & & \\
 & 3x^3 & +3x^2 & +6x & & & & \\ \cline{2-4}
 & & x^2 & -x & & & & \\
 & & -x^2 & -x & -2 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & -2x & +1 & & &
\end{array}
$$

L'égalité fondamentale de la division est $x^4 - 2x^3 - 7x + 3 = (x^2 + x + 2)(x^2 - 3x + 1) - 2x + 1$.

d)

$$
\begin{array}{rrr|ll}
6x^4 & +x^2 & +1 & 2x^2 & +1 \\ \cline{4-5}
-6x^4 & -3x^2 & & 3x^2 & -1 \\ \cline{1-2}
 & -2x^2 & & & \\
 & 2x^2 & +1 & & \\ \cline{2-3}
 & & 2 & &
\end{array}
$$

L'égalité fondamentale de la division est $6x^4 + x^2 + 1 = (2x^2 + 1)(3x^2 - 1) + 2$.

e)

$$
\begin{array}{rrrr|lll}
-2x^3 & & -3x & +1 & 3x^3 & +x^2 & -1 \\ \cline{5-7}
2x^3 & +\frac{2}{3}x^2 & & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & & \\ \cline{1-4}
 & \frac{2}{3}x^2 & -3x & +\frac{1}{3} & & &
\end{array}
$$

L'égalité fondamentale de la division est $-2x^3 - 3x + 1 = (3x^3 + x^2 - 1)\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{1}{3}$.

Exercice 4. Commençons par effectuer la division euclidienne de $f(x)$ par $x + 2$.

$$
\begin{array}{rrrrr|llll}
3x^4 & & -2x^2 & +4x & -3 & x & +2 & & \\ \cline{6-9}
-3x^4 & -6x^3 & & & & 3x^3 & -6x^2 & +10x & -16 \\ \cline{1-2}
 & -6x^3 & & & & & & & \\
 & 6x^3 & +12x^2 & & & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 10x^2 & & & & & & \\
 & & -10x^2 & -20x & & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -16x & & & & & \\
 & & & +16x & +32 & & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 29 & & & &
\end{array}
$$

L'égalité fondamentale de la division est donc

$$f(x) = (x + 2)(3x^3 - 6x^2 + 10x - 16) + 29.$$

Si on évalue ce $f(x)$ en -2, le premier produit tombe et il reste $f(-2) = 29$. Faisons maintenant la vérification par substitution :

$$
\begin{array}{rcl}
f(-2) & = & 3 \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 3 \\
 & = & 3 \cdot 16 - 2 \cdot 4 - 8 - 3 \\
 & = & 48 - 8 - 8 - 3 \\
 & = & 29.
\end{array}
$$

Exercice 5.
Dans chaque cas, nous allons effectuer la division euclidienne de $f(x)$ par le polynôme $x - a$ ce qui nous donnera $f(x) = (x - a)q(x) + r(x)$ où $q(x)$ sera le quotient et $r(x)$ le reste. Ainsi on pourra facilement calculer $f(a) = (a - a)q(a) + r(a) = r(a)$.

a)

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & -4x^2 & +x & +1 & x \; -1 \\ \cline{5-5} -3x^3 & +3x^2 & & & 3x^2 \; -x \\ \cline{1-2} & -x^2 & & & \\ & x^2 & -x & & \\ \cline{2-4} & & & 1 & \end{array}$$

$f(x) = (x-1)(3x^2 - x) + 1$, donc $f(1) = 1$.

b)

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & & +2x & +3 & x \; -3 \\ \cline{5-5} -x^3 & +3x^2 & & & x^2 \; +3x \; +11 \\ \cline{1-2} & 3x^2 & & & \\ & -3x^2 & +9x & & \\ \cline{2-3} & & 11x & & \\ & & -11x & +33 & \\ \cline{3-4} & & & 36 & \end{array}$$

$f(x) = (x-3)(x^2 + 3x + 11) + 36$, donc $f(3) = 36$.

c)

$$\begin{array}{rrrr|l} 4x^3 & +2x^2 & +3x & +8 & x \; +2 \\ \cline{5-5} -4x^3 & -8x^2 & & & 4x^2 \; -6x \; +15 \\ \cline{1-2} & -6x^2 & & & \\ & 6x^2 & +12x & & \\ \cline{2-3} & & 15x & & \\ & & -15x & -30 & \\ \cline{3-4} & & & -22 & \end{array}$$

$f(x) = (x+2)(4x^2 - 6x + 15) - 22$, donc $f(-2) = -22$

d)

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & -4x^3 & -x^2 & +2x & +4 & x \; +8 \\ \cline{6-6} -3x^4 & -24x^3 & & & & 3x^3 \; -28x^2 \; +223x \; -1782 \\ \cline{1-2} & -28x^3 & & & & \\ & 28x^3 & +224x^2 & & & \\ \cline{2-3} & & 223x^2 & & & \\ & & -223x^2 & -1784x & & \\ \cline{3-4} & & & -1782x & & \\ & & & +1782x & +14256 & \\ \cline{4-5} & & & & 14260 & \end{array}$$

$f(x) = (x+8)(3x^3 - 28x^2 + 223x - 1782) + 14260$, donc $f(-8) = 14260$.

e)

$$\begin{array}{rrrrrr|l} x^5 & -6x^4 & +5x^3 & +x^2 & +3x & -9 & x \; -9 \\ \cline{7-7} -x^5 & +9x^4 & & & & & x^4 \; +3x^3 \; +32x^2 \; +289x \; +2604 \\ \cline{1-2} & 3x^4 & & & & & \\ & -3x^4 & +27x^3 & & & & \\ \cline{2-3} & & 32x^3 & & & & \\ & & -32x^3 & +288x^2 & & & \\ \cline{3-4} & & & 289x^2 & & & \\ & & & -289x^2 & +2601x & & \\ \cline{4-5} & & & & 2604x & & \\ & & & & -2604x & +23436 & \\ \cline{5-6} & & & & & 23427 & \end{array}$$

$f(x) = (x-9)(x^4 + 3x^3 + 32x^2 + 289x + 2604) + 23427$, donc $f(9) = 23427$.

Exercice 6.

Pour que a soit une racine de $f(x)$, il faut que le polynôme $(x-a)$ soit facteur de $f(x)$. En effet, si c'est le cas $f(x) = (x-a)q(x)$, où $q(x)$ est le quotient de la division euclidienne et le reste est nul. Ainsi $f(a) = (a-a)q(a) = 0$ ce qui signifie que a est une racine de $f(x)$. Pour cet exercice nous allons donc effectuer la division euclidienne de $f(x)$ par $(x-a)$ et regarder si le reste est nul ou pas.

a)

$$
\begin{array}{rrrr|lll}
x^3 & -4x^2 & +9x & -10 & x & -2 & \\ \cline{5-7}
-x^3 & +2x^2 & & & x^2 & -2x & +5 \\ \cline{1-2}
 & -2x^2 & & & & & \\
 & 2x^2 & -4x & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 5x & & & & \\
 & & -5x & +10 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}
$$

Le reste est égal à 0, ainsi on peut écrire $f(x) = (x-2)(x^2-2x+5)$ et voir que $f(2) = 0$ et donc que 2 est une racine de $f(x)$.

b)

$$
\begin{array}{rrrr|lll}
4x^3 & -4x^2 & +7x & +1 & x & +4 & \\ \cline{5-7}
-4x^3 & -16x^2 & & & 4x^2 & -20x & +87 \\ \cline{1-2}
 & -20x^2 & & & & & \\
 & 20x^2 & +80x & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 87x & & & & \\
 & & -87x & -348 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -347 & & &
\end{array}
$$

Dans ce cas, $f(-4) = -347$ donc -4 n'est pas une racine de $f(x)$.

c) Si on fait comme les autres cas, on devrait faire la division de $f(x)$ par $(x - \frac{1}{2})$, cependant on préfère travailler avec des coefficients entiers. On prendra donc comme diviseur $d(x) = (2x-1)$. Le résultat sera le même car $d(\frac{1}{2}) = 0$ et le polynôme $(x - \frac{1}{2})$ évalué en $\frac{1}{2}$ est aussi égal à 0.

$$
\begin{array}{rrrrr|llll}
8x^4 & -2x^3 & +7x^2 & -2x & -1 & 2x & -1 & & \\ \cline{6-9}
-8x^4 & +4x^3 & & & & 4x^3 & +x^2 & +4x & +1 \\ \cline{1-2}
 & 2x^3 & & & & & & & \\
 & -2x^3 & +x^2 & & & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 8x^2 & & & & & & \\
 & & -8x^2 & +4x & & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 2x & & & & & \\
 & & & -2x & +1 & & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

$f(\frac{1}{2}) = 0$, donc $\frac{1}{2}$ est une racine de $f(x)$.

d)

$$
\begin{array}{rrrr|lll}
2x^3 & +9x^2 & -17x & +6 & x & +6 & \\ \cline{5-7}
-2x^3 & -12x^2 & & & 2x^2 & -3x & +1 \\ \cline{1-2}
 & -3x^2 & & & & & \\
 & 3x^2 & +18x & & & & \\ \cline{2-3}
 & & x & & & & \\
 & & -x & -6 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}
$$

$f(-6) = 0$ donc -6 est une racine de $f(x)$.

Exercice 7. Posons $f(x) = kx^3 + 2x^2 - 3x + 4$. Pour que $x+1$ soit facteur de $f(x)$, il faut que lors de la division euclidienne de $f(x)$ par $x+1$, le reste soit égal à 0. En effet, on pourra alors écrire $f(x) = (x+1)q(x)$ où $q(x)$

sera le quotient de la division.

Méthode courte. Un corollaire du cours nous dit que $f(x)$ est divisible par $x+1$ si et seulement si $f(-1)=0$. Or ici,

$$f(-1) = k(-1)^3 + 2(-1)^2 - 3(-1) + 4 = -k + 2 + 3 + 4 = -k + 9,$$

et donc $f(-1) = 0$ si et seulement si $-k+9=0$, c'est-à-dire que $f(x)$ est divisible par $x+1$ si et seulement si $k=9$.

Méthode longue. Effectuons la division, puis choisissons un k tel que le reste est égal à 0.

$$\begin{array}{rrrr|l}
kx^3 & +2x^2 & -3x & +4 & x \quad +1 \\ \cline{5-5}
-kx^3 & -kx^2 & & & kx^2 \; +(2-k)x \; +(k-5) \\ \cline{1-2}
 & (2-k)x^2 & & & \\
 & -(2-k)x^2 & -(2-k)x & & \\ \cline{2-3}
 & & (k-5)x & & \\
 & & -(k-5)x & -(k-5) & \\ \cline{3-4}
 & & & 4-(k-5) &
\end{array}$$

Ainsi le reste de la division est $4-(k-5)$. On cherche maintenant un k pour que le reste $4-(k-5)$ soit égal à 0. On pose alors $4-(k-5)=0$ et en résolvant cette équation, on trouve $k=9$.

Discussion. La factorisation $9x^3 + 2x^2 - 3x + 4 = (x+1)(9x^2 - 7x + 4)$ de $f(x)$ lorsque $k=9$ (qui n'est pas demandée) s'obtient directement par la méthode longue, alors que la division est une étape en plus dans la méthode courte. Dans les deux cas, la division pourra avantageusement être effectuée avec un schéma de Horner.

Exercice 8.

a) $4x + xy = x(4+y)$ correspond à **J)**

b) $3x + 12 = 3(x+4) = 3(4+x)$ correspond à **G)**

c) $x^2 + 5y^2z = y^2(x+5z)$ correspond à **F)**

d) $21y - 14 = 7(3y-2)$ correspond à **C)**

e) $-4x - 2y = -2(2x+y)$ correspond à **D)**

f) $8x^2z + 4z = 4z(2x^2+1)$ correspond à **I)**

g) $-18xy - 12x = -6x(3y+2)$ correspond à **K)**

h) $6x^2y + 15xy^3 = 3xy(2x+5y^2)$ correspond à **A)**

i) $16x + 24y + 8 = 8(2x+3y+1)$ correspond à **E)**

j) $x^3 + 3x^2z + 4x^2 = x^2(x+3z+4)$ correspond à **B)**

k) $-5xyz - 10z - 15 = -5(xyz+2z+3)$ correspond à **H)**

Exercice 9. Dans cet exercice, il s'agit de reconnaître quelle identité appliquer à quel polynôme.

a) $8x^3 + 27x^3 = (2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

b) $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x+3y)^2$

c) $\frac{1}{125}x^3 - \frac{3}{10}x^2yz + \frac{15}{4}xy^2z^2 - \frac{125}{8}y^3z^3 = (\frac{1}{5}x - \frac{5}{2}yz)^3$

d) $6x^2 - 24y^2 = 6(x^2 - 4y^2) = 6(x-2y)(x+2y)$

e) $81s^2 - 72st + 64t^2$, ce polynôme est irréductible.