EPFL — Cours Euler 08.10.2025
Deuxième année

Série 8

Exercice 1. Soit n un entier naturel se terminant par 5 et compris entre 10 et 100. Pour calculer n^2 on peut utiliser le procédé suivant très utile en calcul oral : multiplier le chiffre des dizaines par le nombre entier suivant et écrire 25 à la suite du résultat ainsi obtenu. Par exemple $25^2 = 625$ car $2 \cdot 3 = 6$. Démontre la légitimité de ce procédé qui est en fait valable pour tout nombre entier naturel se terminant par 5.

Exercice 2. On voit que $5^2 - 5 = 4^2 + 4$ et $6^2 - 6 = 5^2 + 5$. Généralise cette observation et démontre-la !

Exercice 3. Quels sont les chiffres des unités des carrés des nombres entiers n avec n compris entre 0 et 99 ?

Exercice 4. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifie ta réponse (si une affirmation est fausse, donne un exemple où le résultat contredit l'affirmation ou prouve le contraire).

a) $x^n - 1$ est toujours divisible par $x - 1$.
b) $x^n + 1$ est toujours divisible par $x + 1$.
c) $x^{2n+1} + 1$ n'est pas toujours divisible par $x + 1$.

Exercice 5. On considère le polynôme $f(x) = -6x^3 + 7x^2 - 1$. Calcule $f(-\frac{1}{3})$ et décompose $f(x)$ en produit de facteurs.

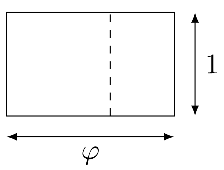
Exercice 6. Donne l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes (n'utilise la formule du trinôme que lorsque cela est vraiment nécessaire : il est possible de ne l'exploiter que 4 fois en tout !) :

a) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
b) $3z^2 + 5z = 0$;
c) $2x^2 - x - 1 = 0$;
d) $2x^2 + x + 3 = 0$;
e) $9x^2 - 6x + 1 = 0$;
f) $(2x - 5)^2 = 7$;
g) $6x^3 - x^2 - 15x = 0$;
h) $(x^2 - \sqrt{7}x + 3)(-3x^2 - 4x + 6) = 0$;
i) $9x^3 + 72x^2 - 5x - 40 = 0$;
j) $x^3 - 4x^2 - 5x + 14 = 0$;
k) $x^4 - 16 = 0$;
l) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$;
m) $(2x + 7)(x^2 - 2x + 1) = (2x + 7)(3x - 5x^2)$
n) $(x^2 - 2)^3 - 2(x^2 - 2)^2 + (x^2 - 2) = 0$.

Exercice 7. La différence entre le carré d'un nombre entier et le nombre lui-même est égale à 182. Quel est ce nombre ?

Exercice 8. La somme des carrés de trois multiples consécutifs de 4 vaut 3104. Quels sont ces nombres ?

Exercice 9. On dit qu'un rectangle est un rectangle d'or si, lorsqu'il est coupé en un carré et un rectangle, le rectangle obtenu est semblable au premier. Détermine la longueur d'un rectangle d'or dont la largeur mesure 1 mètre. Sais-tu comment on appelle ce nombre ?



Exercice 10. Résous les systèmes d'équations suivants par substitution ou par addition.

a) $\left\{\begin{array}{rrcl} x & +2y & = & 4 \\ 5x & -2y & = & 8 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rrrl} 8x & +9y & -2 & = 0 \\ 3x & -y & -27 & = 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{ccccc} \dfrac{5x-y}{3} & + & \dfrac{x+y}{2} & = & 7+\dfrac{x}{18} \\ \dfrac{x}{3} & + & \dfrac{y}{4} & = & 2 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{ccccc} \dfrac{4x+15}{3} & - & \dfrac{3y-5}{5} & = & x \\ \dfrac{2y+3x}{4} & + & \dfrac{y+15}{5} & = & y \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{rcl} (2x+1)(y-2) & = & 2yx \\ x(3y-2)-3y(x-1)+4 & = & 0 \end{array}\right.$

f) $\left\{\begin{array}{rrcl} x & -2y & = & 3 \\ 3x & -6y & = & 9 \end{array}\right.$

g) $\left\{\begin{array}{rcl} 2(x+y) & = & 5 \\ x+y & = & 3 \end{array}\right.$

h) $\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & -z & = 5 \\ 3x & -2y & +z & = 4 \end{array}\right.$

i) $\left\{\begin{array}{rrcl} 5x & -2y & = & 7 \\ 10x & +3y & = & 7 \\ x & -5y & = & 7 \end{array}\right.$

j) $\left\{\begin{array}{rrcl} 3x & -2y & = & 5 \\ x & -3y & = & 4 \\ 7x & +5y & = & 2 \end{array}\right.$

Exercice 11. La somme des deux chiffres dont se compose un nombre vaut 9. Si l'on retranche 3 de chacun d'eux, le nombre qu'ils forment vaut la moitié du nombre de départ, diminuée de 6. Quel est ce nombre ?

Exercice 12. Considérons un nombre à 3 chiffres et formons un nombre à 6 chiffres en l'écrivant deux fois de suite. Par exemple si on commence avec 345, on obtient 345345. Démontrer que ce nombre est divisible par 7, 11 et 13 et que le quotient de la division par $7 \cdot 11 \cdot 13$ redonne le nombre de départ.