EPFL – Automne 2025	S. Basterrechea
Analyse I – CGC, EL, MX	**Exercices**
Série 5	13 octobre 2025

Exercice (A déposer sur Moodle au plus tard le 17 octobre à 23h59.)**.**
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{j=1}^{n+1} j\,2^j = n\,2^{n+2} + 2.$$

Solution.

On veut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\sum_{j=1}^{n+1} j\,2^j = n\,2^{n+2} + 2.$$

Ancrage *: Soit* $n = 0$. *Alors, le membre de gauche est*

$$\sum_{j=1}^{0+1} j2^j = \sum_{j=1}^{1} j2^j = 1 \cdot 2^1 = 2,$$

tandis que le membre de droite est

$$0 \cdot 2^{0+2} + 2 = 2.$$

Vu qu'on obtient deux fois la même chose, l'ancrage est vérifié.

Pas de récurrence *: Supposons que l'équation est vraie pour un certain* $n \in \mathbb{N}$, *c'est-à-dire supposons que*

$$\sum_{j=1}^{n+1} j2^j = n2^{n+2} + 2 \tag{H.R.}$$

et montrons que l'équation est vraie pour $n + 1$ *:*

$$\sum_{j=1}^{(n+1)+1} j2^j = (n+1)2^{(n+1)+2} + 2,$$

qui est équivalent à montrer que

$$\sum_{j=1}^{n+2} j2^j = (n+1)2^{n+3} + 2.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+2} j2^j &= \sum_{j=1}^{n+1} j2^j + (n+2)2^{n+2} \\
&\overset{\text{(H.R.)}}{=} n2^{n+2} + 2 + n2^{n+2} + 2 \cdot 2^{n+2} \\
&= 2^{n+2}(n+n+2) + 2 \\
&= (2n+2)2^{n+2} + 2 \\
&= (n+1)2^{n+3} + 2
\end{aligned}$$

qui est ce qu'on voulait démontrer.