Corrigé série 6

Exercice 1 (5 points)
Soit $a \in \mathbb{R}$ et montrons que la fonction f est continue en ce point. Soit $\varepsilon > 0$, alors si $|x-a| < \delta = \varepsilon$, on a $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \varepsilon$, ce qui signifie que la fonction f est continue en a. Comme a est arbitraire, la fonction f est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$, elle est donc continue.

Exercice 2 (5 points)

a) Pour montrer l'identité $-2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = \cos(x) - \cos(y)$,
   - calculer $\cos(u+v) - \cos(u-v)$ à l'aide des formules de la somme et différence des angles,
   - poser ensuite $u = \dfrac{x+y}{2}$ et $v = \dfrac{x-y}{2}$.

b) Montrons que la fonction f est continue en tout point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \varepsilon$. Alors si $|x - a| < \delta$, on a

$$|f(x) - f(a)| = |\cos(x) - \cos(a)| \stackrel{\text{(a)}}{=} \left|-2\sin\left(\tfrac{x-a}{2}\right)\sin\left(\tfrac{x+a}{2}\right)\right|$$

$$\stackrel{\left|\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\right|\leq 1}{\leq} \left|2\sin\left(\tfrac{x-a}{2}\right)\right| \stackrel{\left|\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\right|\leq\frac{x+a}{2}}{\leq} \left|2\tfrac{x-a}{2}\right| = |x-a| < \varepsilon,$$

Ainsi, la fonction cos est continue en toute abscisse $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (5 points)

a) Faux, cette fonction n'est pas continue en $a = 0$ car $\lim_{x\to 0^+} 1/x = +\infty$. La fonction f n'étant pas définie en $a = 0$, elle ne peut pas être continue en ce point.

b) Vrai, pour qu'une fonction soit continue, il faut qu'elle le soit en tout point de son domaine de définition et ici $0 \notin D(f)$.

c) Faux, car la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une fonction rationnelle.

d) Vrai pour la même raison qu'au point (b) : les points auquels le dénomninateur s'annule ne font pas partie du domaine de définition.

e) Vrai, car nous avons vu dans une série précédente que $\lim_{x\to a} |x| = |a|$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (5 points)

a) On a $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x-1}{x+1}$, ainsi $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$.

Cette fonction peut être prolongée par continuité en $x = 1$ car $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.

Son prolongement par continuité en $x = 1$ est :

$$g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

b) La fonction f n'est pas prolongeable par continuité en $x = -1$ car $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ n'existe pas.

c) Comme 0 appartient au domaine de définition de la fonction f, il n'est pas nécessaire de la prolonger par continuité en 0.

En fait, si on se réfère strictement à la définition du prolongement par continuité, la question de prolonger en $x = a$ une fonction déjà définie en $x = a$ n'a simplement pas de sens.

Exercice 5 (5 points)

a) $D(f) = \mathbb{R}^*$. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos(x) = 1$, la fonction f peut être prolongée par continuité.

Sa prolongée par continuité est :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

f admet une asymptote horizontale à gauche d'équation $y = 1$.

b) $D(f) = \mathbb{R}^*$. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sin(x) = 0$ mais que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$, la fonction f ne peut pas être prolongée par continuité en $x = 0$.

f admet une asymptote horizontale à gauche d'équation $y = 1$.

c) On a $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2, 6\}$. On a $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \exp_{10}(2) = 100$, f ne peut donc pas être prolongée par continuité en $x = 2$.

Par ailleurs, $f(3) = 1000$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \exp_{10}(3) = 1000$ et donc f est continue en $x = 3$.

f admet une asymptote oblique à gauche d'équation $y = -x + 1$, une asymptote verticale d'équation $x = 6$ et une asymptote horizontale à droite d'équation $y = 3000$.

d) On a $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Comme nous l'avons vu au cours, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, donc f peut être prolongée par continuité en $x = 0$:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

f admet une asymptote horizontale à gauche et à droite d'équation $y = 0$.

En effet, pour $x > 0$, on a $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$,

par le théorème des deux gendarmes, on conclut que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$

De même, pour $x < 0$, on a $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{-1}{x}$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.

Exercice 6 (5 points)

Montrons que f et continue en 0. Soit $\varepsilon > 0$, alors si $|x - 0| < \delta = \varepsilon$, on a

$$|f(x) - f(0)| = \begin{cases} |x - 0| < \varepsilon & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ |0 - 0| = 0 < \varepsilon & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

et donc f est continue en 0.

Soit $a \in \mathbb{Q}$; montrons que la fonction f est discontinue en ce point. Considérons la suite de terme général $a + \sqrt{2}/n$. Alors $f(a + \sqrt{2}/n) = 0$ car $a + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$ (la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle, voir ci dessous). Cependant, comme la suite $(a + \sqrt{2}/n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a et que $f(a) = a$, on en conclut que la fonction n'est pas continue en $a \notin \mathbb{Q}$.

Soit $a \notin \mathbb{Q}$; montrons que la fonction f est discontinue en ce point. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{Q}$ avec $a < x_n < a + \frac{1}{n+1}$. On obtient ainsi une suite de rationnels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a. Donc $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a \neq 0$, mais $f(a) = 0$.
La fonction f ne peut donc pas être continue en a (car si f était continue en a, alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, on aurait $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$).

Montrons que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle. Soit $x = p/q$ un nombre rationnel et y un nombre irrationnel. La somme $x+y$ ne peut pas être un nombre rationnel $x+y = m/n$ car si c'était le cas on aurait $y = m/n - x = m/n - p/q = (pn + mq)/(qn)$, et y serait donc un nombre rationnel. La somme $x + y$ est donc un nombre irrationnel.

Exercice 7 (5 points)

Pour que cette limite soit égale à 1, les coefficients des termes de degré 0 et 1 doivent être égaux, c'est-à-dire $(a^2-1)(b-2)=0$ et $a^2(b+2)=4$. Ces conditions impliquent que $a=\pm 1$ et $b=2$.

Ainsi $\lim_{x\to 0} \dfrac{(a^2-1)(b-2)+4x+x^3}{a^2(b+2)x+abx^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{4x+x^3}{4x+abx^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{4+x^2}{4+abx} = 1.$

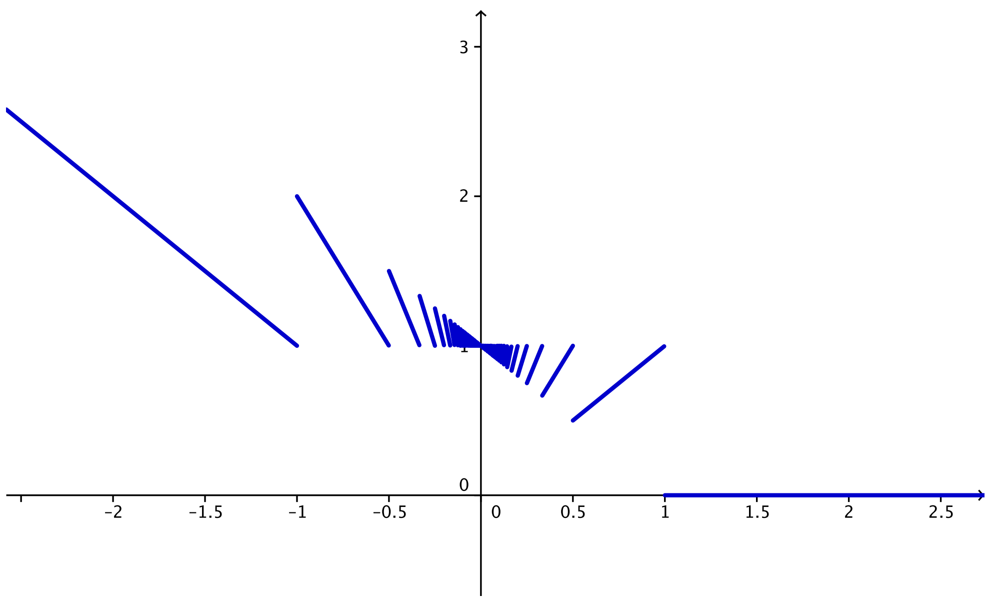
Exercice 8 (5 points)

a) Soit $x<-1$, alors $\lfloor 1/x\rfloor = -1$ et donc $x\lfloor 1/x\rfloor = -x$.

b) Soit $x>1$, alors $\lfloor 1/x\rfloor = 0$ et donc $x\lfloor 1/x\rfloor = 0$.

c) Soit $\dfrac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ alors $\lfloor 1/x\rfloor = n$ et donc $f(x)=nx$.

d) On a $\lim\limits_{x\to 1/n^-} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1/n^+} f(x) = \dfrac{n-1}{n}$, la limite en $1/n$ n'existe donc pas et la fonction n'est pas continue en ce point. Ci-dessous, le graphe de la fonction :



Exercice 9 (5 points)

a) Comme $f(a)\in[a,b]$ et $f(b)\in[a,b]$, on a que $a\leq f(a)\leq b$ et $a\leq f(b)\leq b$, ainsi $g(a)=a-f(a)\leq a-a=0$ et $g(b)=b-f(b)\geq b-b=0$.

b) Par le point précédent, on sait que $g(a)\leq 0\leq g(b)$ et donc par le Théorème de la Valeur Intermédiaire, il existe $c\in[a,b]$ tel que $g(c)=0$.

c) Par le point précédent, il existe $c\in[a,b]$ tel que $g(c)=0$, ou de manière équivalente, $f(c)=c$: c'est la solution cherchée.

Exercice 10 (5 points)

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot (1 + a/x + b/x^2 + c/x^3) = -\infty$, de même $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si on prend x_1 suffisament grand on aura $f(x_1) > 0$ et de même comme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, si on prend x_2 suffisament petit on aura $f(x_2) < 0$.

c) Comme $f(x_2) < 0 < f(x_1)$ et que la fonction f est continue, on conclut par le Théorème de la Valeur Intermédiaire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$. Rappelons que $f(c)$ donne aussi la valeur du reste de la division euclidienne de $f(x)$ par $x - c$. On a donc $f(x) = (x-c)(x^2 + a'x + b')$; comme $x - c$ a un seul zéro et que $x^2 + a'x + b'$ a aucun, un, ou deux zéros, l'équation $f(x) = 0$ possède au minimum une solution et au maximum trois solutions.

d) Puisque $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$ on sait grâce au point précédent que la fonction f s'annule dans l'intervalle $[0, 1]$. De même, du fait que $f(1/2) < 0$, la fonction f s'annule dans l'intervalle $[1/2, 1]$. Par suite, en constatant que $f(3/4) > 0$, on peut affirmer que la fonction f s'annule dans l'intervalle $[1/2, 3/4]$. Finalement, en remarquant que $f(5/8) < 0$, on obtient que dans l'intervalle $[5/8, 3/4]$, la fonction f s'annule. On a ainsi trouvé un intervalle de longueur $1/8$ dans lequel la fonction f s'annule.

Exercice 11 (5 points)

a) Vrai, en voici la preuve. Soient $x \leq y$ alors comme f est croissante on a $f(x) \leq f(y)$, comme g est croissante on a $g(f(x)) \leq g(f(y))$ et donc $g \circ f$ est croissante.

b) Faux. Par exemple, la fonction $x \mapsto \arctan x$ est bornée par $\pi/2$ mais n'atteint jamais cette valeur.

c) Faux car la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

est bornée par 1, atteint son maximum, par exemple en 0, mais n'est pas continue.

d) Faux, en reprenant la fonction f du point précédent et en considérant la fonction $g = -f$, alors $f + g = f - f \equiv 0$ et la fonction identiquement nulle est continue.

e) Vrai. En effet, la fonction cosinus est continue (vu précédemment). Par suite, la fonction $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ est aussi continue puisqu'elle est la composition des fonctions continues $g(x) = x - \frac{\pi}{2}$ et $f(x) = \cos(x)$. Ainsi, la fonction donnée est continue car elle est obtenue par composition, addition et soustraction de fonctions continues.

Exercice 12 (5 points) On a $f(0) = 10$ et $f(\sqrt{\pi/4}) = 11$ et donc si f était continue, le Théorème de la Valeur Intermédiaire assurerait l'existence de $c \in [0, \sqrt{\pi/4}]$ tel que $f(c) = 10.5$. Mais ce n'est pas possible car f ne prend que des valeurs entières.

Exercice 13 (5 points)

a) Cette fonction n'est pas continue en 0. Considérons pour cela la suites de terme général $a_n = \sqrt{2}/n$. On a alors $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \sqrt{2}/n = 1$ et pourtant la suite a_n tend vers 0. Ainsi la fonction n'est pas continue en 0, elle n'est donc pas continue.

b) Montrons que f est injective. Pour ce faire, soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y$. Alors si les deux sont rationnels, $f(x) = x \neq y = f(y)$, si les deux sont irrationnels, $f(x) = 1 + x \neq 1 + y = f(y)$. Finalement si l'un des deux, disons x, est irrationnel et y est rationnel, alors $f(x) = 1+x \neq y = f(y)$ car la somme d'un rationnel, 1, et d'un irrationel, x, est irrationnelle (car sinon, on a $\frac{p}{q} + x = \frac{p'}{q'}$ avec $p, p' \in \mathbb{N}$ et $q, q' \in \mathbb{N}^*$, et alors $x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{p'q-pq'}{qq'} \in \mathbb{Q}$ ne peut pas être irrationnel) et ne peut donc pas être égale à y. Ainsi, quels que soient x et y dans $\mathbb{R}$ avec $x \neq y$, on a $f(x) \neq f(y)$, ce qui prouve que la fonction est injective.

Montrons que la fonction est surjective, soit $y \in \mathbb{R}$, alors si $y \in \mathbb{Q}$ on a $y = f(y)$ et si $y \notin \mathbb{Q}$, on a $y = f(y-1)$ (car $y - 1 \notin \mathbb{Q}$), ce qui prouve que la fonction est surjective.

La fonction f est injective et surjective, elle est donc bijective.

c) Supposons que f est croissante, ce qui signifie que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$. Or on a le contre-exemple suivant : $\sqrt{2} < 2$ et pourtant $f(\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} > 2 = f(2)$ et donc la fonction n'est pas croissante. Supposons à présent que f est décroissante, ce qui signifie que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, on a $f(x) > f(y)$, or si $x = 1$ et $y = \sqrt{2}$, cette relation ne marche pas. Ainsi, f n'est pas non plus décroissante.

Exercice 14 (5 points)

a) Deux petites démonstration par récurrence montrent que $\sqrt{2} \leq x_{n-1} < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus

$$x_n - x_{n-1} = \sqrt{2x_{n-1}} - x_{n-1} = \frac{2x_{n-1} - x_{n-1}^2}{\sqrt{2x_{n-1}} + x_{n-1}} = \frac{x_{n-1}(2 - x_{n-1})}{\sqrt{2x_{n-1}} + x_{n-1}}$$

Comme $\sqrt{2} \leq x_{n-1} < 2$, on a $x_n - x_{n-1} > 0$, soit $x_n > x_{n-1}$, c'est-à-dire que la suite (x_n) est strictement croissante. Comme elle est aussi bornée, elle converge.

Les candidats x à sa limite satisfont $x = \sqrt{2x}$, c'est-à-dire $x(x-2) = 0$.

Comme $x_0 > 0$ est que la suite est croissante, la limite est nécessairement $x = 2$.

b) On a $\dfrac{\cos(\pi x) - 1}{x-2} = \dfrac{\cos^2(\pi x) - 1}{(x-2)(\cos(\pi x)+1)} = \dfrac{\sin^2(\pi x)}{(x-2)(\cos(\pi x)+1)}$.

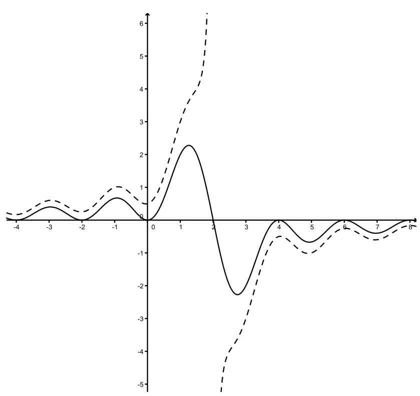
Or $\cos(\pi x) + 1$ tend vers 2, $\sin(\pi x)$ tend vers 0.

Pour calculer la limite de $\sin(\pi x)/(x-2)$, on pose $x - 2 = y$ et on obtient $\sin(\pi y)/(\pi y) \cdot \pi$ qui tend vers $1 \cdot \pi$ lorsque y tend vers 0 et donc le tout tend vers 0.

c) On trouve $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ n'existe pas.

d) Par le point (b), on peut prolonger f par continuité en 2 ; par contre, comme par exemple $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = +\infty$, la fonction g n'est pas prolongeable par continuité en $x = 2$.

De plus, on a $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = -\infty$ et donc f n'admet pas d'asymptote verticale en $x = 2$ (voir la ligne continue dans le graphe ci-contre) tandis que g admet une asymptote verticale en $x = 2$.



Bonus.

a) Supposons que $a \geq b \;\Leftrightarrow\; a - b \geq 0$ et donc $|a - b| = a - b$. Ainsi,

$\dfrac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \dfrac{1}{2}(a + b + a - b) = a = \max(a, b)$.

On effectue le même raisonnement si $b \geq a$.

b) On a $\min(a, b) = \dfrac{1}{2}(a + b - |a - b|)$, on peut le vérifier de la même façon qu'au point (a).

c) Soient $a \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues en a. Alors par une proposition du cours, les fonctions $f + g$ et $f - g$ sont continues, par suite la fonction $|f - g|$ est continue, de même que la fonction $f + g + |f - g|$. En appliquant une dernière fois cette proposition, on a que la fonction $\max(f, g) = \dfrac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ est continue.

d) Même raisonnement qu'au point précédent.