Exercice 1.

a) Les triangles $\triangle A'B'C'$ et $\triangle ABC$ sont semblables par le théorème de Thalès. Ainsi les arrêtes $[AC]$ et $[A'C']$ sont proportionnelle. En appliquant le théorème de Thalès à chaque faces on obtient la proportionalité des arrêtes $[AS]$ et $[AS']$ et de même pour toutes les arrêtes manquantes.

b) Le rapport λ est égal, par exemple, à la grandeur $\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$, comme $\overline{SA}$ est plus grand que $\overline{SA'}$, on a que $\lambda \in [0,1]$ ($\lambda = 0$ si $H = h$ et $\lambda = 1$ si $h = 0$). Notons h' la hauteur de la petite pyramide, comme celle de la grande vaut H, on a que le rapport d'homothétie vaut $\lambda = \dfrac{h'}{H}$ et donc $h' = \lambda H$. Pour calculer σ' on multiplie la longueur d'un côté du $\triangle A'B'C'$ par sa hauteur. Ces deux longueurs peuvent être exprimées par des longueurs du triangle $\triangle ABC$ multipliées par λ et donc $\sigma' = \lambda^2\sigma$.

c) Le volume de la grande pyramide vaut $\dfrac{1}{3}\cdot\sigma\cdot H$. Le volume de la petite vaut $\dfrac{1}{3}\cdot\sigma'\cdot h' = \lambda^3\dfrac{1}{3}\cdot\sigma\cdot H$. Ainsi le volume de la pyramide tronquée est la différence de ces deux volumes, c'est-à-dire $\dfrac{1}{3}\cdot\sigma\cdot H - \lambda^3\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\sigma\cdot H = (1-\lambda^3)\dfrac{1}{3}\cdot\sigma\cdot H$. Or on sait que la hauteur de la petite pyramide peut s'exprimer de deux façons différentes, $H - h$ ou λH, en égalant ces deux expressions, on obtient que $H = \dfrac{h}{1-\lambda}$. Ainsi le volume de la pyramide tronquée vaut

$$\frac{1-\lambda^3}{1-\lambda}\frac{1}{3}\cdot\sigma\cdot h = \frac{1}{3}\cdot(1+\lambda+\lambda^2)\cdot\sigma\cdot h.$$

d) Comme on a $\sigma' = \lambda^2\sigma$, on en déduit que $\sigma\sigma' = \lambda^2\sigma^2$. En prenant la racine carrée de cette expression on a le résultat.

e) $(1+\lambda+\lambda^2)\sigma = \sigma + \lambda\sigma + \lambda^2\sigma = \sigma + \sqrt{\sigma\sigma'} + \sigma'$.

f) On approche l'aire du petit cercle, πr^2, par une sucession de polygones d'aire σ' et l'aire du grand cercle, πR^2, par une sucession de polygones d'aire σ'. Ainsi la quantité $\sqrt{\sigma\sigma'}$ approche la quantité $\pi r R$. On approche le volume du cône tronqué par le volume de pyramides tronquées dont les bases sont des polygones dont le nombre de sommets augmente indéfiniment. Si l'aire des bases s'approche de l'aire des disques qui forment les bases du cône tronqué, les volumes des pyramides tronquées s'approchent du volume cherché.

g) $\text{vol}(P) = \dfrac{1}{3}\cdot 2^2\cdot 1 = \dfrac{4}{3}$, $\text{vol}(P') = \dfrac{1}{3}\cdot 1^2\cdot 1 = \dfrac{1}{3}$, ainsi la somme de ces deux volumes vaut $\dfrac{5}{3}$. Par la formule de **??** on a $\text{vol}(T) = \dfrac{1}{3}\cdot(4+2+1)\cdot 1 = \dfrac{5+2}{3} = \dfrac{7}{3}$. On voit dans cet exemple que la somme des volumes des pyramides de bases correspondantes et de même hauteur est inférieur au véritable volume du prisme tronqué. Contrairement à ce que nous avons vu pour l'aire d'un "triangle tronqué" (c'est-à-dire un trapèze), la formule du volume d'une pyramide tronquée n'est pas donnée par la somme des volumes des pyramides de mêmes bases.

Exercice 2. Afin de vérifier que $\mathbb{Z}$ est un anneau commutatif, il suffit de vérifier les axiomes un à un. L'élément neutre du groupe abélien sous-jacent $(\mathbb{Z},+)$ est 0, l'opposé d'un $a \in \mathbb{Z}$ est $-a$, l'élément neutre pour la multiplication est 1. De plus, la multiplication est commutative, et elle est bien distributive par rapport à l'addition. Pour voir que $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps, il suffit de trouver un élément non-nul de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas inversible via la multiplication, autrement dit qu'il existe un $a \in \mathbb{Z}$ tel que $ab \neq 1$ pour tout $b \in \mathbb{Z}$. Par exemple l'élément 2 possède clairement cette propriété.

Exercice 3.

a) $x+1$

b) x^2+2x+1

c) $(x+1)^3 = (x+1)(x^2+2x+1) = x^3+2x^2+x+x^2+2x+1 = x^3+3x^2+3x+1$

d) $(x+1)^4 = (x+1)^3(x+1) = (x^3+3x^2+3x+1)(x+1) = x^4+3x^3+3x^2+x+x^3+3x^2+3x+1 = x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

Pour le cas $(x+1)^{10}$, il serait trop fastidieux de le calculer à la main. En revanche, nous pouvons nous appuyer sur le triangle de Pascal afin de trouver les coefficients de $(x+1)^{10}$. Voici le triangle de Pascal jusqu'à la dixième ligne ; nous rappelons que chaque nombre est obtenu en faisant la somme des deux nombres situés en-dessus de lui.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&&1&&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&&1&&1&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&1&&2&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&&&\\
&&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&&&\\
&&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&&&\\
&&1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1&&\\
&1&&9&&36&&84&&126&&126&&84&&36&&9&&1&\\
1&&10&&45&&120&&210&&252&&210&&120&&45&&10&&1
\end{array}$$

Pour écrire $(x+1)^{10}$, nous regardons donc la dixième ligne du triangle qui nous en donne les coefficients.

$$(x+1)^{10} = x^{10} + 10x^9 + 45x^8 + 120x^7 + 210x^6 + 252x^5 + 210x^4 + 120x^3 + 45x^2 + 10x + 1.$$

Exercice 4.

a) $x^4 - 1$

b) $$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{4}(x+1)^k &= (x+1)^{(\sum_{k=1}^{4} k)} = (x+1)^{10}\\ &= x^{10} + 10x^9 + 45x^8 + 120x^7 + 210x^6 + 252x^5 + 210x^4 + 120x^3 + 45x^2 + 10x + 1.\end{aligned}$$