**Corrigé Test 1 - Probabilités et statistiques** 24 septembre 2025

## Exercice 1. *(1 + 1 + 1 + 2 = 5 points) Probabilités*

Dans une classe de 24 élèves, il y a 3 prix à attribuer. Calculer le nombre de façons d'attribuer ces 3 prix dans chacun des cas suivants :

a) les prix sont tous différents et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul prix ;
Il y en a $A_3^{24} = 12'144$.

b) les prix sont tous différents et chaque élève peut recevoir plusieurs prix ;
Il y en a $24^3 = 13'824$.

c) les prix sont identiques et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul prix.
Il y en a $C_3^{24} = 2'024$.

d) les prix sont identiques et chaque élève peut recevoir plusieurs prix.
Il y en a $C_{24-1}^{24+3-1} = C_{23}^{26} = 2'600$.

## Exercice 2. *(4 points)*

Démontrer que $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X,Y)$.

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X+Y) &= E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2 \\
&= \text{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - (\text{E}(X) + \text{E}(Y))^2 \\
&= \text{E}(X^2) + 2\text{E}(XY) + \text{E}(Y^2) - \text{E}(X)^2 - 2\text{E}(X)\text{E}(Y) - \text{E}(Y^2) \\
&= \text{E}(X^2) - \text{E}(X)^2 + \text{E}(Y^2) - \text{E}(Y)^2 + 2(\text{E}(XY) - \text{E}(X)\text{E}(Y)) \\
&= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X,Y).
\end{aligned}$$

## Exercice 3. *(8 points)*

On dépose dans une urne 12 boules (4 rouges, 4 blanches et 4 vertes). Les boules d'une même couleur sont numérotées de 1 à 4 (il y a donc trois boules portant le numéro 1, une de chaque couleur ; de même pour les numéros 2 à 4).
On tire simultanément quatre boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir

a) exactement trois boules de la même couleur ;

$$\text{P(3 boules de même couleur)} = \frac{3 \cdot C_3^4 \cdot C_1^8}{C_4^{12}} = \frac{96}{495} \cong 19,39\%.$$

b) au moins une boule portant le numéro 1 ;

On calcule d'abord la probabilité de ne pas avoir de boule portant le numéro 1 : $\frac{C_4^9}{C_4^{12}}$.
La probabilité recherchée correspond à son complémentaire, donc on a

$$\text{P(au moins un 1)} = 1 - \text{P(aucun 1)} = 1 - \frac{C_4^9}{C_4^{12}} = 1 - \frac{126}{495} = \frac{41}{55} \cong 74,55\%.$$

c) exactement une boule portant le numéro 1 et exactement trois boules rouges.

Il faut séparer le cas où la boule numéro 1 n'est pas rouge de celui où la boule numéro 1 est rouge. La probabilité est donc égale à

$$\text{P(une boule numéro 1 et 3 rouges)} = \frac{2 \cdot C_3^3 + C_2^3 \cdot C_1^6}{C_4^{12}} = \frac{20}{495} \cong 4,04\%.$$

## Exercice 4. *(10 points) Probabilités*

a) On lance un dé bien équilibré dix fois de suite.
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois le chiffre 6 ?
En n'oubliant pas de commencer par choisir les trois dés qui ont le chiffre 6, on obtient la probabilité

$$C_3^{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \cong 15,5\%.$$

b) On lance simultanément trois dés à six faces bien équilibrés.
Calculer la probabilité des événements suivants :

$A =$ "obtenir un total d'exactement 4 points"
Les seuls possibilités sont $1+1+2$, $1+2+1$ et $2+1+1$, donc $P(A) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72} \cong 1,39\%$.

$B =$ "obtenir un total d'au moins 5 points"
$P(B) = 1 - P\{\text{somme} \leq 4\} = 1 - P(A) - P\{\text{somme} = 3\} = 1 - \frac{1}{72} - \frac{1}{216} = \frac{53}{54} \cong 98,15\%$.

$C =$ "obtenir les chiffres 1, 2 et 3"
Il y a 6 possibilités de placer les chiffres 1, 2 et 3, donc $P(C) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36} \cong 2,78\%$.

$D =$ "obtenir le chiffre 3 sur un dé sachant que le total des points vaut 5"
On utilise la formule de probabilité conditionnelle et on obtient

$$P(D) = \frac{P(\text{avoir le chiffre 3 et le total qui vaut 5})}{P(\text{total qui vaut 5})} = \frac{C_1^3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

car pour obtenir le chiffre 3 et le total qui vaut 5, il suffit de choisir le dé qui vaut 3, les deux autres ayant du coup le chiffre 1.

## Exercice 5. *(4 points)*

Démontrer que si les événements $E$ et $F$ sont indépendants, alors les événements $E$ et $F^c$ le sont aussi.
De l'hypothèse $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ et de la propriété $P(F^c) = 1 - P(F)$, on déduit

$$\begin{aligned} P(E) \cdot P(F^c) &= P(E)(1 - P(F)) = P(E) - P(E)P(F) = P(E) - P(E \cap F) \\ &= (P(E \cap F) + P(E \cap F^c)) - P(E \cap F) = P(E \cap F^c) \end{aligned}$$

## Exercice 6. *(11 points) Statistiques*

Une étude (fictive!) aimerait déterminer s'il y a une relation entre la taille des pieds d'enfants de 10 ans et leur quotient intellectuel. Pour cela, ils constituent un échantillon de 10 enfants et obtiennent les données suivantes :

| Enfant | Pointure | QI |
|---|---|---|
| A | 31 | 50 |
| B | 31 | 55 |
| C | 32 | 52 |
| D | 33 | 56 |
| E | 33 | 63 |
| F | 34 | 65 |
| G | 35 | 69 |
| H | 36 | 90 |
| I | 37 | 110 |
| J | 38 | 150 |

a) On considère $X$ la variable aléatoire qui donne la pointure du pied et $Y$ la variable aléatoire qui donne le QI. Calculer l'espérance et la variance pour $X$ et $Y$.
On a $E[X] = 34$, $E[X^2] = 1161,4$, $\text{Var}(X) = 5,4$, $E[Y] = 76$, $E[Y^2] = 6702$ et $\text{Var}[Y] = 926$.

b) Donner la définition du coefficient de corrélation des variables $X$ et $Y$ puis le calculer.
On a $E[XY] = 2648,1$, $\text{Cov}(X,Y) \cong 64,1$ et $\text{Corr}(X,Y) = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}[X] \cdot \text{Var}[Y]}} =\cong 0,90$

c) Est-il mathématiquement acceptable d'utiliser un modèle de régression linéaire pour estimer $Y$ en fonction de $X$ ? Justifier la réponse.
Oui, car la corrélation est proche de 1.

d) Donner la formule du modèle de régression linaire qui permet d'estimer $Y$ en fonction de $X$. Le calcul des paramètres $a$ et $b$ n'est pas demandé.
La formule est

$$Z = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}(X)}(X - E(X)) + E(Y)$$

ou

$$Z = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot X + E(Y) - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot E(X)$$

## Exercice 7. *(4 points)*

Dans une urne, il y a 5 boules rouges et 8 boules noires. On vous propose le jeu suivant :
Vous payez 10 francs, puis vous tirez successivement et sans remise 2 boules de l'urne.
Si vous tirez 2 boules rouges, vous gagnez 30 francs.
Si vous tirez une boule rouge, vous gagnez 10 francs.
Si vous ne tirez aucune boule rouge, vous ne gagnez rien.
On note $X$ le gain **net** à ce jeu.

a) Calculer l'espérance de $X$.
$E(X) = 20 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} + 0 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12} \cdot 2 + (-10) \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} = -\frac{40}{39} \cong -1,02$

b) Ce jeu est-il équitable ? Justifier par une phrase.
Non, ce jeu n'est pas équitable car l'espérance n'est pas nulle. On perd en moyenne 1 franc par partie.