

Corrigé série 5

Exercice 1 (10 points)

a) On a

$$E(X) = \sum_{i=1}^6 i \frac{1}{6} = \frac{7}{2},$$

et

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^6 i^2 \frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$

Ainsi

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{35}{12}.$$

b) Ici, $E(X) = \frac{1}{2}$ et, comme $E(X) = E(X^2)$, on a

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

c)

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1,$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2},$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{2}.$$

d)

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2},$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = 3,$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{4}.$$

Exercice 2 (5 points)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 7 \cdot \frac{1}{60} + 8 \cdot \frac{3}{60} + 9 \cdot \frac{6}{60} + 10 \cdot \frac{9}{60} + 11 \cdot \frac{14}{60} + 12 \cdot \frac{11}{60} \\ &\quad + 13 \cdot \frac{7}{60} + 14 \cdot \frac{6}{60} + 15 \cdot \frac{2}{60} + 16 \cdot \frac{1}{60} = \frac{341}{30}, \\ \mathbb{E}(X^2) &= 7^2 \cdot \frac{1}{60} + 8^2 \cdot \frac{3}{60} + 9^2 \cdot \frac{6}{60} + 10^2 \cdot \frac{9}{60} + 11^2 \cdot \frac{14}{60} + 12^2 \cdot \frac{11}{60} \\ &\quad + 13^2 \cdot \frac{7}{60} + 14^2 \cdot \frac{6}{60} + 15^2 \cdot \frac{2}{60} + 16^2 \cdot \frac{1}{60} = \frac{797}{6}, \\ \text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{3269}{900}. \end{aligned}$$

Exercice 3 (5 points)

Soit X la variable aléatoire qui donne le plus grand numéro tiré et Y la variable aléatoire qui donne le plus petit numéro tiré. On calcule :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 2 \cdot \frac{2}{20} + 3 \cdot \frac{4}{20} + 4 \cdot \frac{6}{20} + 5 \cdot \frac{8}{20} = 4 \\ \mathbb{E}(Y) &= 1 \cdot \frac{8}{20} + 2 \cdot \frac{6}{20} + 3 \cdot \frac{4}{20} + 4 \cdot \frac{2}{20} = 2 \end{aligned}$$

Pour calculer $\mathbb{E}(XY)$, il faut calculer la probabilité de tous les couples $(X = i, Y = j)$. Remarquons que si $j \geq i$, la probabilité est nulle. On a donc

$$\mathbb{E}(XY) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{20} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{2}{20} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{20} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{20} + 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{20} + 4 \cdot 3 \cdot \frac{2}{20} + 5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{20} + 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{20} + 5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{20} + 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{20} = 8,5$$

Ainsi, la covariance est égale à

$$\text{Cov}(X, Y) = 8,5 - 4 \cdot 2 = 0,5.$$

Exercice 4 (5 points)

On commence par calculer les espérances $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$ pour ensuite calculer la covariance.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{i,j=1}^6 (i+j) \cdot \frac{1}{36} = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \dots + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7, \\ \mathbb{E}(Y) &= \sum_{i,j=1}^6 (i-j) \cdot \frac{1}{36} = 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{5}{36} + \dots + 5 \cdot \frac{1}{36} + (-1) \cdot \frac{5}{36} + \dots + (-5) \cdot \frac{1}{36} = 0, \end{aligned}$$

Pour calculer $E(XY)$, il faut calculer la probabilité de tous les couples $(X = i, Y = j)$. Par exemple, $P(X = 2, Y = 0) = \frac{1}{36}$ et $P(X = 2, Y = j) = 0$ si $j \neq 0$. On obtient alors

$$E(XY) = \sum_{i,j=1}^6 (i+j)(i-j) \cdot \frac{1}{36} = 0.$$

Ainsi, la covariance est égale à

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.$$

Exercice 5 (10 points)

- a) Faux. Les événements sont indépendants.
- b) Vrai. Si X est l'événement *7, 23 et 45 sortent cette semaine* et Y est l'événement *7, 23 et 45 sortent la semaine prochaine*, alors

$$P(X \cap Y) = P(X)P(Y) \leq P(X).$$

- c) Faux. Sinon la variance serait une notion triviale.
- d) Vrai. Conséquence du théorème 3.4 des notes de cours (chapitre IV).
- e) Faux. Soient a et b deux variables réelles. On peut facilement vérifier avec le théorème 3.4 des notes de cours que

$$E(aX + b) = aE(X) + b,$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Var}(aX + b) &= E((aX + b)^2) - E(aX + b)^2 \\ &= E(a^2X^2 + b^2 + 2abX) - (aE(X) + b)^2 \\ &= a^2E(X^2) + b^2 + 2abE(X) - (a^2E(X)^2 + b^2 + 2abE(X)) \\ &= a^2(E(X^2) - E(X)^2) = a^2\text{Var}(X). \end{aligned}$$

- f) Faux. Construisons un contre-exemple. Soit X le résultat du lancer d'un dé. On a déjà vu dans l'exercice que $\text{Var}(X) = \frac{35}{12}$. Or, comme $E(X^2) = \frac{91}{6}$ et $E(X^4) = \frac{2275}{6}$, on a

$$\text{Var}(X^2) = \frac{2275}{6} - \left(\frac{91}{6}\right)^2 = \frac{5369}{36}$$

qui est différent de $\left(\frac{35}{12}\right)^2 = \frac{1225}{144}$.

Exercice 6 (5 points)

- a) On a $P(X = 2 \cap Y = 1) = 0$ et $P(X = 2)P(Y = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \neq 0$.
b) $E(X) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 0$, $E(Y) = 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, et $E(XY) = 0$.
c) $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 = 0$.

Exercice 7 (5 points)

Soit X le nombre de carpes pêchées dans l'étang. On a, pour $i \in \{0, \dots, 20\}$

$$P(X = i) = \frac{\binom{30}{i} \binom{70}{20-i}}{\binom{100}{20}}.$$

Avec cela, on peut calculer $E(X) = \sum_{i=0}^{20} iP(X = i) = 6$ et $E(X^2) = \sum_{i=0}^{20} i^2 P(X = i) = \frac{1300}{33}$

$$\text{d'où } \text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{112}{33}.$$

Plus généralement, s'il y a n poissons dans l'étang dont c carpes et qu'on pêche $k \leq c$ poissons,

$$\text{soit } X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on pêche la carpe } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ pour } i = 1, \dots, c.$$

Alors $E(X_i) = \frac{k}{n}$ car on peut toujours supposer que la carpe i est le premier poisson pêché.

De plus, $E(X_i)^2 = E(X_i) = \frac{k}{n}$ puisque $X_i^2 = X_i$ car $X_i \in \{0; 1\}$.

Si X est le le nombre de carpes pêchées, $X = \sum_{i=1}^c X_i$ et $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^c X_i\right) = c E(X_i) = c \frac{k}{n}$.

Pour utiliser la formule $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$, il faut encore calculer $E(X^2)$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E\left(\left(\sum_{i=1}^c X_i\right)^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^c X_i^2 + \sum_{i,j=1, i \neq j}^c X_i X_j\right) = c E(X_i^2) + (c^2 - c) E(X_i X_j) \\ &= c \frac{k}{n} + c(c-1) \frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{ck}{n} \left(1 + \frac{(c-1)(k-1)}{n-1}\right) \end{aligned}$$

Par suite, $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{ck}{n} \left(\frac{(n-1) + (c-1)(k-1)}{n-1}\right) - \left(\frac{ck}{n}\right)^2$

Avec $n = 100$, $c = 30$ et $k = 20$, $E(X) = \frac{30 \cdot 20}{100} = 6$ et

$$\text{Var}(X) = \frac{30 \cdot 20}{100} \cdot \frac{99 + 29 \cdot 19}{99} - \frac{30^2 \cdot 20^2}{100^2} = 6 \cdot \frac{650}{99} - 6^2 = \frac{2 \cdot 650 - 33 \cdot 6^2}{33} = \frac{112}{33}.$$

Exercice 8 (5 points)

Soit X_i la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées dans l'urne i . Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées au total.

On a $Y = \sum_i X_i$, donc

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_i \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{4} + \frac{3}{10} = \frac{109}{60} = 1.81\bar{6}.$$

Exercice 9 (5 points)

Donnons un nom à chacune des personnes : la première s'appelle 1, la deuxième s'appelle 2, etc. Soient $i, j, k \in \{1, \dots, 100\}$ trois personnes distinctes. On note $X_{\{i,j,k\}}$ la variable aléatoire valant 1 si i, j, k ont leur anniversaire le même jour (et personne d'autre qu'eux n'a son anniversaire ce jour-là), et 0 sinon.

L'espérance de $X_{\{i,j,k\}}$ est

$$P(X_{\{i,j,k\}} = 1) = \left(\frac{1}{365}\right)^3 \left(\frac{364}{365}\right)^{97}.$$

Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de jours où exactement trois personnes ont leur anniversaire.

Comme

$$Y = \sum_{\{i,j,k\} \subseteq \{1, \dots, 100\}} X_{\{i,j,k\}},$$

on a

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{\{i,j,k\} \subseteq \{1, \dots, 100\}} \mathbb{E}(X_{\{i,j,k\}}) = 365 \cdot \binom{100}{3} \left(\frac{1}{365}\right)^3 \left(\frac{364}{365}\right)^{97} \approx 0.93.$$

Exercice 10 (10 points)

On sait que l'équation de la droite passant par (a, b) et (c, d) est

$$y = \frac{d-b}{c-a}(x-a) + b.$$

Il serait "moral" que le calcul de la droite de régression linéaire passant par (a, b) et (c, d) nous conduise à cette droite. Procédons :

Posons

$$X = (a, c) \quad \text{et} \quad Y = (b, d).$$

La droite de régression linéaire est alors, par un théorème du cours,

$$y = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}(x - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y).$$

On a $E(X) = \frac{a+c}{2}$, $E(X^2) = \frac{a^2+c^2}{2}$, $E(Y) = \frac{b+d}{2}$, $E(Y^2) = \frac{b^2+d^2}{2}$ et $E(XY) = \frac{ab+cd}{2}$.

Ainsi, $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \frac{(a-c)^2}{4}$ et

$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{ab+cd}{2} - \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2} = \frac{(a-c)(b-d)}{4}$, et donc

$$\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} = \frac{\frac{(a-c)(b-d)}{4}}{\frac{(a-c)^2}{4}} = \frac{b-d}{a-c}.$$

L'équation de la droite de régression est alors

$$y = \frac{b-d}{a-c} \left(x - \frac{a+c}{2} \right) + \frac{b+d}{2} = \frac{b-d}{a-c} x - \frac{b-d}{a-c} \frac{a+c}{2} + \frac{b+d}{2}.$$

On vérifie facilement que

$$-\frac{b-d}{a-c} \frac{a+c}{2} + \frac{b+d}{2} = \frac{d-b}{c-a}(-a) + b,$$

ainsi, l'équation de la droite de régression est

$$y = \frac{d-b}{c-a}(x-a) + b,$$

en accord avec notre intuition de début.

Exercice 11 (5 points)

a) Si l'on fait les calculs avec $X = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ et $Y = (210, 200, 2000, 180, 155, 125, 80)$, on obtient

$$E(X) = 4,$$

$$E(Y) \cong 164,29$$

$$E(X^2) = 20,$$

$$E(Y^2) \cong 28935,71$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 4,$$

$$\text{Var}(Y) \cong 1945,92$$

$$E(XY) = 573,57,$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = -83,57$$

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)} \cdot \sqrt{\text{Var}(Y)}} = -0,947$$

b) Comme $|\text{Corr}(X, Y)|$ est très proche de 1, une approximation linéaire peut être utilisée pour estimer Y en fonction de X dans l'intervalle de temps étudié, soit entre 1996 et 2008.

Une extrapolation en dehors de cette période serait plus hasardeuse.

Exercice 12 (5 points)

a) La variable indépendante X est la taille, la variable indépendante Y est le poids.

b) $E(X) = \frac{566}{5} = 113.2$ et $E(Y) = \frac{203}{10} = 20.3$

c) $\text{Var}(X) = \frac{869}{25} = 34.76$, donc $\sigma_X = \frac{\sqrt{869}}{5} \approx 5.896$

$$\text{Var}(Y) = \frac{761}{100} = 7.61, \text{ donc } \sigma_Y = \frac{\sqrt{761}}{10} \approx 2.759$$

d) $\rho^2(X, Y) = \frac{732^2}{761 \cdot 869} \approx 0.81 = 81\%$.

La taille des enfants explique 81% de la variance de leur poids. 19% de cette variance s'explique par d'autres facteurs comme l'alimentation par exemple.

e) L'équation de la droite est alors

$$\begin{aligned} y &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}(x - E(X)) + E(Y) = \frac{366(x - \frac{566}{5})}{869} + \frac{203}{10} \\ &= \frac{732x - 47581}{1738} \approx 0.421x - 27.377. \end{aligned}$$

f) Il suffit de poser $x = 120$ dans la dernière équation :

$$y = \frac{732 \cdot 120 - 47581}{1738} = \frac{40259}{1738} \approx 23.16.$$

Exercice 13 (5 points)

On utilise le théorème 3.4 des notes de cours, avec $g(x) = ax + b$. On a

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= E(g(X)) = \sum_x g(x)P(X = x) = \sum_x (ax + b)P(X = x) \\ &= \sum_x axP(X = x) + \sum_x bP(X = x) = aE(X) + b. \end{aligned}$$

Exercice 14 (5 points)

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X + Y) &= \mathbb{E}((X + Y)^2) - (\mathbb{E}(X + Y))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\
&= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).
\end{aligned}$$

Exercice 15 (10 points)

a) $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{N}$ et $\mathbb{E}(X) = N \cdot \frac{1}{N} = 1$.

b) Comme $\mathbb{E}(X_i^2) = \frac{1}{N}$, on a $\text{Var}(X_i) = \frac{1}{N} - \frac{1}{N^2} = \frac{N-1}{N^2}$.

De plus, $\text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N^2(N-1)}$.

c) On utilise l'exercice pour, au moyen d'une récurrence, démontrer que

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = \sum_{i=1}^N \text{Var}(X_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Ainsi, $\text{Var}(X) = N \cdot \frac{N-1}{N^2} + 2 \binom{N}{2} \frac{1}{N^2(N-1)} = 1$.

Exercice 16 (5 points)

On pose $Y = aX + b$. La formule du calcul de la corrélation donne

$$\begin{aligned}
\rho(X, Y) = \text{Corr}(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)}} = \frac{a\text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, b)}{\sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(aX + b)}} \\
&= \frac{a\text{Var}(X) + 0}{\sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{a^2 \text{Var}(X)}} = \frac{a}{\sqrt{a^2}} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } a > 0 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Si $a = 0$, alors la variance de Y est nulle et, donc, la corrélation n'est pas définie.

Exercice 17 (5 points)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_s \varepsilon_s^2 &= \frac{1}{n} \sum_s \left(y_s - \left(\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} (x_s - \mu_X) + \mu_Y \right) \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_s \left((y_s - \mu_Y) - \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} (x_s - \mu_X) \right)^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_s \left((y_s - \mu_Y)^2 - 2 \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} (x_s - \mu_X)(y_s - \mu_Y) + \frac{\text{Cov}^2(X, Y)}{\text{Var}^2(X)} (x_s - \mu_X)^2 \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_s (y_s - \mu_Y)^2 - 2 \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} \frac{1}{n} \sum_s (x_s - \mu_X)(y_s - \mu_Y) + \frac{\text{Cov}^2(X, Y)}{\text{Var}^2(X)} \frac{1}{n} \sum_s (x_s - \mu_X)^2 \\
&= \text{Var}(Y) - 2 \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} \text{Cov}(X, Y) + \frac{\text{Cov}^2(X, Y)}{\text{Var}^2(X)} \text{Var}(X) \\
&= \text{Var}(Y) - \frac{\text{Cov}^2(X, Y)}{\text{Var}(X)} = \text{Var}(Y) \left(1 - \frac{\text{Cov}^2(X, Y)}{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)} \right).
\end{aligned}$$

Exercice 18 (10 points)

Partie I : Le calcul de E_1 peut se faire directement :

$$P(E_1) = \frac{\binom{4}{2} \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}.$$

Pour calculer E_2 , notons E l'événement *la première personne est du groupe B*. On a alors, avec la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(E_2) &= P(E_2|E)P(E) + P(E_2|E^c)P(E^c) \\
&= \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{10} + \frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10} = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

On aurait aussi pu s'aider d'un arbre pour calculer $P(E_2)$.

On voit facilement que E_3 est en fait l'événement *les trois personnes sont O ou les trois personnes sont A*, ainsi

$$P(E_3) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{24}.$$

Pour calculer $P(E_4)$, on considère toutes les possibilités (sans tenir compte de l'ordre) :

$$\begin{aligned}
P(E_4) &= P(O, A, B) + P(O, A, AB) + P(O, B, AB) + P(A, B, AB) \\
&= \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{1} \binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{1} \binom{1}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{1}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{4}{1} \binom{2}{1} \binom{1}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Partie II :

a) Notons G_X l'événement *la personne est du groupe X* où $X \in \{O, A, B, AB\}$.

Notons aussi R_+ (resp. R_-) l'événement *la personne est Rhésus +* (resp. *-*).

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(G_A) &= P(G_A \cap (R_+ \cup R_-)) = P((G_a \cap R_+) \cup (G_a \cap R_-)) \\ &= P(G_a \cap R_+) + P(G_a \cap R_-) = 0.4 + 0.07 = 0.47. \end{aligned}$$

Avec la définition de la probabilité conditionnelle

$$\begin{aligned} P(G_A|R_-) &= \frac{P(G_A \cap R_-)}{P(R_-)} = \frac{P(G_A \cap R_-)}{P(R_- \cap (G_A \cup G_O \cup G_B \cup G_{AB}))} \\ &= \frac{P(G_A \cap R_-)}{P(R_- \cap G_A) + P(R_- \cap G_O) + P(R_- \cap G_B) + P(R_- \cap G_{AB})} \\ &= \frac{0.07}{0.07 + 0.06 + 0.01 + 0.01} = \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

b) On a

$$\binom{20}{7} 0.47^7 (1 - 0.47)^{20-7} \approx 0.102.$$

La probabilité qu'il y ait cinq élèves de chaque groupe sanguin est

$$\binom{20}{5} \binom{15}{5} \binom{10}{5} \binom{5}{5} \cdot 0.47^5 \cdot 0.41^5 \cdot 0.08^5 \cdot 0.04^5 \approx 1.046 \cdot 10^{-6}.$$

c) Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de députés du groupe A . Pour $i = 0, \dots, 100$, on a

$$P(X = i) = \binom{100}{i} 0.47^i (1 - 0.47)^{100-i}.$$

Dès lors, la probabilité cherchée est

$$\sum_{i=38}^{50} \binom{100}{i} 0.47^i (1 - 0.47)^{100-i}.$$

La plupart des calculatrices de poche n'arrivent pas à évaluer correctement cette somme. Il vaut mieux effectuer le calcul avec un logiciel, par exemple *Maxima*¹.

Il suffit alors d'entrer deux lignes de code :

```
P(i) := binomial(100,i) * 0.47^i * (1-0.47)^(100-i);
sum(P(i),i,38,50);
```

Maxima évalue la somme à 0.731.

1. On peut l'obtenir gratuitement sur Internet à l'adresse : <http://maxima.sourceforge.net>