Exemple 2.4. Comment transformer le nombre $-67,8326$ en une fraction irréductible ?

$$-67,8326 = \frac{-678326}{10000} = -\frac{339163}{5000} \quad \text{irréductible}$$

Corollaire 2.5. *Si le dénominateur de la fraction irréductible d'un nombre rationnel n'est pas un diviseur d'une puissance de 10, alors son écriture décimale est infinie.*

On va voir que cette écriture décimale est nécessairement périodique.

Considérons une fraction irréductible dont le dénominateur n'est pas diviseur d'une puissance de 10, alors la méthode précédente ne marche pas. On procède par division euclidienne. En général la division d'un nombre entier n par un nombre entier m donne un quotient q et un reste de la division r. Le reste est un nombre positif ou nul, mais strictement plus petit que m. On a donc

$$n = q \cdot m + r \ , \quad 0 \leq r < m$$

Exemple 2.6. On cherche le développement décimal de $\frac{1}{7}$. On itère le procédé de division euclidienne. On a $1 : 7 = 0$ reste 1, et on dit que le quotient de la division de 1 par 7 vaut zéro et il reste 1. Il y a donc zéro unité dans un septième. Pour trouver le premier chiffre après la virgule, on multiplie alors le reste par 10 et on recommence :

$1 = 0 \cdot 7 + \boxed{1}$ $\quad 1 < 7 \quad \frac{1}{7} = 0 \cdot 1 + \frac{1}{7}$

$10 = 1 \cdot 7 + 3$ le quotient vaut 1 et il reste 3 $\quad 3 < 7 \quad \frac{1}{7} = 0 \cdot 1 + \frac{10}{70} = 0 \cdot 1 + \frac{1}{10} + \frac{3}{70}$

$30 = 4 \cdot 7 + 2 \quad 2 < 7 \quad \frac{1}{7} = 0 \cdot 1 + \frac{1}{10} + \frac{30}{700} = 0 \cdot 1 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{700}$

$20 = 2 \cdot 7 + 6 \quad 6 < 7 \quad \frac{1}{7} = 0 \cdot 1 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{20}{7000} = 0 \cdot 1 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{6}{7000}$

$60 = 8 \cdot 7 + 4 \ , \ 4 < 7 \quad \frac{1}{7} = 0 \cdot 1 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{8}{10000} + \frac{4}{70000}$

$40 = 5 \cdot 7 + 5 \ , \ 5 < 7 \quad \frac{1}{7} = 0 \cdot 1 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{8}{10000} + \frac{5}{100000} + \frac{5}{700000}$

$50 = 7 \cdot 7 + \boxed{1} \ , \ 1 < 7 \quad \frac{1}{7} = 0 \cdot 1 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{8}{10000} + \frac{5}{100000} + \frac{7}{1000000} + \frac{1}{7000000}$