Un chariot se trouve à la position $x_0 = 0$ au temps $t = 0$. On le tire ensuite avec une vitesse $v(t) = 3t^2$ $[m/s]$. A quel moment sera-t-il à la position $x = 8$ $[m]$? Et quel travail aura-t-on dû fournir ? Pour calculer le travail, on utilisera la deuxième loi de Newton, selon laquelle la force est donnée par le produit de la masse et de l'accélération, c'est-à-dire $F = ma$.

La position du chariot au temps $t \geq 0$ est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v(s)\ ds \\ &= \int_0^t 3s^2\ ds \\ &= t^3. \end{aligned}$$

On cherche donc t tel que

$$8 = t^3 \Leftrightarrow t = 8^{1/3} = 2.$$

Le travail à fournir pour tirer le chariot entre les positions $x = 0$ et $x = 8$ est donné par

$$W = \int_0^8 F(x)\ dx.$$

On effectue le changement de variable $x = x(t) = t^3 \Rightarrow dx = x'(t)dt = 3t^2dt$. D'après le calcul que l'on a fait plus haut, le chariot est à la position $x = 8$ $[m]$ au temps $t = 2$ $[s]$. On a donc :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^8 F(x)\ dx \\ &= \int_0^2 F(t)x'(t)\ dt. \end{aligned}$$

En utilisant $F(t) = ma(t) = mv'(t)$ et $x'(t) = v(t)$, le travail peut être ré-écrit comme

$$\begin{aligned} W &= \int_0^2 mv'(t)v(t)\ dt \\ &= \int_0^2 m\frac{1}{2}\left((v(t))^2\right)'\ dt \\ &= m\frac{1}{2}(v(t))^2\Big|_{t=0}^{2} \\ &= \frac{m}{2}3 \cdot 2^2 \\ &= 6m. \end{aligned}$$

(On retrouve ici le théorème de l'énergie cinétique, selon lequel le travail effectué est égal à la variation de l'énergie cinétique $E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2$.)