Exercice 1 :

a) Une primitive de f est donnée par

$$F(x) = -e^{-x}(2+x).$$

Une primitive de g est donnée par

$$G(x) = \frac{1}{4}(x+1)^4.$$

b) Les fonctions f et g sont égales aux points d'abscisse $x = -1$ et $x = 0$. On remarque que pour $-1 \leq x \leq 0$, $f(x) \geq g(x)$. L'aire géométrique recherchée est donc

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{0} f(x) - g(x)\ dx \\
&= \int_{-1}^{0} f(x)\ dx - \int_{-1}^{0} g(x)\ dx \\
&= F(0) - F(-1) - G(0) + G(-1) \\
&= -2 + e^{+1} - \frac{1}{4} \\
&= -\frac{9}{4} + e^{+1}.
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

a) On remarque que

$$\begin{aligned}
\left(e^{-\sqrt{x}}\right)' &= e^{-\sqrt{x}}\left(-\sqrt{x}\right)' \\
&= e^{-\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= \frac{-1}{2}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{N} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx &= -2\int_{1}^{N} \left(e^{-\sqrt{x}}\right)'\ dx \\
&= -2e^{-\sqrt{x}}\Big|_{x=1}^{N} \\
&= -2\left(e^{-\sqrt{N}} - e^{-1}\right).
\end{aligned}$$

En prenant la limite lorsque N tend vers l'infini, on trouve donc

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx &= \lim_{N\to\infty} -2\left(e^{-\sqrt{N}} - e^{-1}\right) \\
&= 2e^{-1}.
\end{aligned}$$

b) On remarque que

$$\frac{x+7}{x^2-x-2} = \frac{x+7}{(x-2)(x+1)} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_3^6 \frac{x+7}{x^2-x-2}\,dx &= \int_3^6 \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1}\,dx \\ &= (3\ln(x-2) - 2\ln(x+1))\Big|_{x=3}^{6} \\ &= 3\ln(4) - 2\ln(7) - 3\ln(1) + 2\ln(4) \\ &= 5\ln(4) - 2\ln(7).\end{aligned}$$

Exercice 3 :

b) Les deux courbes s'intersectent pour $x=-1$ et $x=2$. Comme à notre habitude, on découpe l'intervalle $[-1,2]$ en utilisant une partition régulière d'ordre n, et on découpe le volume en tranches T_i, $i=1,\ldots,n$, d'épaisseur $\delta_i = x_{i+1}-x_i$. Considérons la droite d'équation $x=x_i$ (droite perpendiculaire à l'axe Ox). Elle coupe la courbe d'équation $y=2-x$ au point $(x_i, 2-x_i)$ et la courbe d'équation $y=4-x^2$ au point $(x_i, 4-x_i^2)$. La distance entre ces deux points vaut $d_i = 2-x_i^2+x_i$. La tranche T_i a donc pour base un triangle équilatéral de côté d_i. La hauteur de ce triangle équilatéral est $h_i = \frac{\sqrt{3}}{2}d_i$, et son aire vaut

$$A_i = h_i\frac{d_i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}d_i^2.$$

Le volume de la tranche correspondante vaut

$$\begin{aligned}V_i &= A_i\delta_i \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(2-x_i^2+x_i)^2\delta_i \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(x_i^4-2x_i^3-3x_i^2+4x_i+4)\delta_i\end{aligned}$$

et le volume total recherché est

$$\begin{aligned}V &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} V_i \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{3}}{4}(x_i^4-2x_i^3-3x_i^2+4x_i+4)\delta_i.\end{aligned}$$

La somme ci-dessus est une somme de Riemann pour la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^4-2x^3-3x^2+4x+4)$, qui est continue et donc intégrable sur l'intervalle $[-1,2]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}V &= \int_{-1}^{2}\frac{\sqrt{3}}{4}(x^4-2x^3-3x^2+4x+4)\,dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(4x+2x^2-x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{x=-1}^{2} \\ &= \frac{81\sqrt{3}}{40}.\end{aligned}$$

Exercice 4 :
Voir corrigé Série 1.

Exercice 5 :
Soit la fonction $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Le volume du corps de révolution obtenu en faisant tourner cette fonction autour de l'axe Ox vaut :

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{a} \pi (f(x))^2 \, dx \\ &= \int_{-a}^{a} \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \, dx \\ &= \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2} \right) \Big|_{x=-a}^{a} \\ &= \frac{4}{3}\pi b^2 a. \end{aligned}$$

En particulier, pour $b = a = r$, on trouve $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, qui est bien le volume d'une sphère de rayon r.

Exercice 6 :
On suppose, pour simplifier les calculs, que le poids d'un mètre cube d'eau vaut 10^4 $[N]$. On note F la force exercée par le liquide sur le cube.

a)
- Si le cube n'est pas dans l'eau, c'est à dire si $x \leq 0$, alors $F = 0$.
- Si le cube est immergé à une profondeur de x $[m]$, pour $0 \leq x \leq 0.3$, le volume de liquide déplacé est
$$V = 0.3^2 \cdot x \ [m^3]$$
et la force exercée par le liquide est donc
$$F = 10^4 \cdot 0.3^2 \cdot x = 900 \cdot x \ [N].$$
- Si $x \geq 0.3$, la totalité du cube est immergée, et la force vaut dans ce cas
$$F = 10^4 \cdot 0.3^3 = 270 \ [N].$$

b) Pour que le cube flotte, il faut que la force exercée par le liquide soit égale à son poids, c'est-à-dire
$$200 = 900 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{2}{9} = 0.\bar{2}.$$
Le cube se trouve donc à une profondeur de $0.\bar{2}$ $[m]$ lorsqu'il flotte.

c) Pour maintenir le cube complètement immergé, la force à fournir est la différence entre la force exercée par le liquide (qui pousse le cube vers le haut) et le poids du cube (qui pousse le cube vers le bas). La force à fournir est donc
$$F_1 = 270 - 200 = 70 \ [N].$$

d) Sans la poussée d'Archimède, la force à fournir pour sortir le cube de l'eau serait -200 $[N]$, ce qui correspond au poids du cube. Le signe "-" vient ici du fait que la force à exercer est dirigée vers le haut, alors que l'on a orienté l'axe des x vers le bas. Avec la poussée d'Archimède, la force à exercer vaut donc $F_2(x) = -(200 - F(x))$. Le travail à fournir est finalement

$$\begin{aligned} W &= \int_{2/9}^{0} -200 + 900x \; dx \\ &= \left(-200x + \frac{900}{2}x^2\right)\Big|_{x=2/9}^{0} \\ &= \frac{200}{9} \; [J]. \end{aligned}$$