4.2 Cinématique

Cette section est tirée du cours d'intégration de N. Pointet.

Définition 4.1.

1. *La vitesse moyenne d'une particule entre deux instants* t_1 *et* t_2 *est*

$$\bar{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

   où $x(t)$ *dénote la position de la particule à l'instant* t. *La vitesse instantanée de la particule à un instant* t_1 *est obtenue en prenant la limite de la quantité ci-dessus lorsque* t_2 *tend vers* t_1, *c'est-à-dire*

$$\begin{aligned} v(t_1) &= \lim_{t_2 \to t1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= x'(t_1). \end{aligned}$$

2. *L'accélération moyenne d'une particule entre deux instants* t_1 *et* t_2 *est*

$$\bar{a} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

   L'accélération instantanée de la particule à un instant t_1 *est obtenue en prenant la limite de la quantité ci-dessus lorsque* t_2 *tend vers* t_1, *c'est-à-dire*

$$\begin{aligned} a(t_1) &= \lim_{t_2 \to t1} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= v'(t_1). \end{aligned}$$

On a donc les relations générales suivantes :

Problèmes du premier ordre

On considère une particule dont la position à un temps t_0 est x_0 et dont on connaît la vitesse $v(t)$ pour tout instant $t \geq t_0$. Si $x(t)$ dénote la position de la particule au cours du temps, alors $x(t)$ satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x'(t) & = v(t), \quad t \geq t_0 \\ x(t_0) & = x_0. \end{cases}$$

En intégrant la première équation entre t_0 et t, on obtient :

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\ ds = \int_{t_0}^{t} v(s)\ ds \Leftrightarrow x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(s)\ ds,$$

et on trouve donc finalement

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s)\ ds.$$

Exemple 4.3. *On considère une voiture dont la vitesse est donnée par* $v(t) = t(10-t)$ *pour* t *entre* 0 *et* 10 *secondes. Quelle distante aura-t-elle parcouru après* 10 *secondes ?*

Problèmes du deuxième ordre

Dans beaucoup de cas, c'est l'accélération, et non la vitesse que l'on connaît. On est donc amené à considérer l'équation différentielle du deuxième ordre suivante :

$$\begin{cases} x''(t) = a(t), \quad t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \\ v(t_0) = v_0, \end{cases}$$

où x_0 et v_0 sont les conditions initiales pour la position et la vitesse. Le problème ci-dessus se résout en résolvant successivement les deux problèmes du premier ordre suivants :

Exemple 4.4. *On considère un véhicule, dont la position et la vitesse initiales sont nulles, et dont l'accélération est donnée par $a(t) = t(5 - t)$ $[m/s^2]$ dans l'intervalle $t \in [0, 5]$ $[s]$. Quelle est la position du véhicule au temps $t = 5$ $[s]$?*

Pour $t \in [0, 5]$, la vitesse du véhicule est

$$v(t) = \int_0^t a(s)\ ds = \int_0^t s(5 - s)\ ds = \frac{-t^3}{3} + \frac{5}{2}t^2,$$

et sa position

$$x(t) = \int_0^t v(s)\ ds = \int_0^t \frac{-s^3}{3} + \frac{5}{2}s^2\ ds = \frac{-t^4}{12} + \frac{5t^3}{6}.$$

On trouve donc $x(5) = \dfrac{-5^4 + 2 \cdot 5 \cdot 5^3}{12} = \dfrac{625}{12} = 52.08\bar{3}$.

Exemple 4.5 (Processus de freinage d'urgence[2]). *On considère un modèle simple de freinage d'urgence d'un véhicule. Dans ce modèle, l'accélération chute entre t_0 et t_1 de 0 à une valeur minimale $-a_m$, puis reste constante jusqu'à l'arrêt du véhicule en t_2. On connaît*

1. *la durée de transition $\Delta t_s = t_1 - t_0$*
2. *la vitesse initiale v_0*
3. *la valeur a_m.*

On cherche à déterminer la durée du freinage maximal $\Delta t_V = t_2 - t_1$, la durée totale du freinage $\Delta t = t_2 - t_0$, ainsi que la distance de freinage $\Delta x = \int_{t_0}^{t_2} v(s)\, ds$.

Commençons par calculer l'accélération $a(t)$ au cours du temps :

$$a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_0 \\ -\dfrac{t - t_0}{t_1 - t_0} a_m & \text{si } t_0 < t \leq t_1 \\ -a_m & \text{si } t_1 < t \leq t_2. \end{cases}$$

Intéressons-nous maintenant à la vitesse :

— *Pour $t \leq t_0$, la vitesse du véhicule est v_0.*

— *Pour $t_0 < t \leq t_1$, on a*

— *Pour $t_1 \leq t_2$, on a*

2. tiré de *Dynamik der Kraftfahrzeuge*, Mitscheke, Wallentowitz, VDI, Springer Verlag.

— *Pour* $t > t_2$*, on a* $v(t) = 0$*.*

Puisque la voiture s'arrête en $t = t_2$*, on doit avoir*

$$\begin{aligned} v(t_2) = 0 &\Leftrightarrow v_0 - \frac{a_m \Delta t_S}{2} - a_m \Delta t_V = 0 \\ &\Leftrightarrow t\Delta t_V = \frac{v_0}{a_m} - \frac{\Delta t_S}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, la distance totale de freinage est

$$\Delta t = \Delta t_S + \Delta t_V = \frac{v_0}{a_m} + \frac{\Delta t_S}{2}.$$

La distance du freinage vaut donc :

Calculons la distance de freinage d'un véhicule roulant à $v_0 = 80\ [km/h] = 22.\bar{2}\ [m/s]$*, dont la capacité de freinage vaut* $a_m = 5.8\ [m/s^2]$ *et la durée de transition* $\Delta t_S = 0.17\ [s]$.

4.3 Moment d'inertie

Définition 4.2. *On considère une particule de masse m qui effectue un mouvement de rotation le long d'une trajectoire circulaire de rayon r. Le moment d'inertie de la particule est donné par*

$$I = mr^2.$$

Cette notion de moment d'inertie s'applique aussi à des solides, comme illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 4.6. *On considère un cylindre de longueur L, de rayon r et de masse volumique constante ρ. On suppose que l'axe de rotation du cylindre est parallèle au cylindre et situé au centre de celui-ci. Quel est le moment d'inertie du cylindre dans ce cas-là ?*
On considère la partition régulière de l'intervalle $[0, r]$, et on découpe le cylindre en n anneaux concentriques de rayon intérieur x_i, de rayon extérieur $x_{i+1} = x_i + \delta_i$ et de hauteur L. Le volume d'un tel anneau est

$$\begin{aligned} V_i &= \pi((x_i + \delta_i)^2 - x_i^2)L \\ &= \pi(2x_i\delta_i + \delta_i^2)L \end{aligned}$$

et son moment d'inertie peut donc être approximé par

$$\begin{aligned} I_i &= \rho V_i x_i^2 \\ &= \rho\pi(2x_i\delta_i + \delta_i^2)Lx_i^2. \end{aligned}$$

Le moment d'inertie total du cylindre est finalement obtenu en sommant pour i allant de 1 à n, et en prenant la limite lorsque n tend vers l'infini :