

Analyse I – Série 12

Echauffement. (Séries de Mac-Laurin)

Trouver les séries de Mac-Laurin et leurs rayons de convergence pour les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sin(x)$

b) $f(x) = \cos(x)$

c) $f(x) = e^x$

d) $f(x) = e^{-x}$

e) $f(x) = \operatorname{sh}(x)$

f) $f(x) = \operatorname{ch}(x)$

g) $f(x) = \operatorname{Log}(1+x)$

h) $f(x) = \operatorname{Log}(1-x)$

Exercice 1. (Formules de dérivées)

Vérifier les identités suivantes à l'aide des séries de Mac-Laurin :

a) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

b) $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$

c) $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$

d) $\frac{d}{dx}\operatorname{Log}(1+x) = \frac{1}{1+x}$

Exercice 2. (Séries entières)

Déterminer le développement en série entière de la fonction $f(x) = \frac{2}{3+4x}$ autour de a et déterminer l'intervalle de convergence pour

a) $a = 0$

b) $a = 2$

Exercice 3. (Séries de Taylor)

Écrire la formule de Taylor à l'ordre n autour de $x = a$, et la série de Taylor autour de a . Quel est le domaine de convergence de la série de Taylor ? Lorsqu'elle converge, est-elle égale à f ? (Pour répondre à cette question, on pourra utiliser les méthodes vues en cours pour étudier le lien entre $x \mapsto 1/(1-x)$ et sa série de Taylor.)

a) $f(x) = e^{2x+1}$ avec $a = 0$,

b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ avec $a = 2$.

Exercice 4. (Séries de Mac-Laurin)

Trouver les trois premiers termes non nuls de la série de Mac-Laurin des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \operatorname{Log}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

b) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$

c) $f(x) = \operatorname{Arctg}(x)$ (utiliser la formule de Taylor)

d) $f(x) = \sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}$

Exercice 5. (V/F : Dérivées d'ordre supérieur)

Soient I un intervalle ouvert, $f, g \in C^{n+1}(I)$ et $a \in I$. Soient encore $k, n \in \mathbb{N}$.

V F

- a) Pour $n \geq 6$, si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $0 \leq k < 7$ et $f^{(7)}(a) = 1$, alors f admet un minimum en a . ☐ ☐

- b) Si $I =]-b, b[$ pour un $b > 0$ et f est impaire sur I , alors $f^{(2k)}(0) = 0$ pour $0 \leq 2k \leq n$. ☐ ☐
- c) Si $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$ pour tout $0 \leq k < n$ et $g^{(n)}(a) \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$. ☐ ☐

Exercice 6. (V/F : Fonction définie par un développement limité)

Soient $b, c \in \mathbb{R}$ et soit $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = bx + cx^2 + x^4\varepsilon(x)$, où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

- | | V | F |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) Alors f est continue en 0. | ☐ | ☐ |
| b) Si $f \in C^2(]-1, 1[)$, alors $f''(0) = c$. | ☐ | ☐ |
| c) On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = b$. | ☐ | ☐ |
| d) $f(x)^2 = b^2x^2 + c^2x^4 + x^6\varepsilon(x)$. | ☐ | ☐ |

Exercice 7. (Primitives)

Trouver des primitives pour les fonctions f suivantes :

- | | | |
|--|----------------------------------|--|
| a) $f(x) = \sin(x)$ | b) $f(x) = \cos(x)$ | c) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ |
| d) $f(x) = e^x$ | e) $f(x) = \operatorname{sh}(x)$ | f) $f(x) = \operatorname{ch}(x)$ |
| g) $f(x) = \operatorname{Log}(x)$ | h) $f(x) = \frac{1}{x}$ | i) $f(x) = (ax + b)^s$
($s \neq -1$) |
| j) $f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$ | k) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ | l) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ |
| m) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$ | n) $f(x) = x \exp(x^2)$ | o) $f(x) = (ax^p + b)^s x^{p-1}$
($s \neq -1, a, p \neq 0$) |

Exercice 8.(*) (Intégration immédiate)

Calculer les intégrales indéfinies suivantes, en cherchant directement à reconnaître la dérivée d'une fonction :

- | | | | |
|---------------------------------|--|--------------------------------------|---|
| a) $\int \frac{3x+4}{1+x^2} dx$ | b) $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3} dx$ | c) $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} dx$ | d) $\int \frac{\operatorname{sh}(x)}{e^x+1} dx$ |
|---------------------------------|--|--------------------------------------|---|

Exercice 9. (Révisions : suites définies par récurrence)

Considérer la suite (a_n) définie par $a_1 := \frac{5}{2}$ et, pour $n \geq 1$,

$$a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 6}{5}.$$

- a) Montrer que $2 \leq a_n \leq 3$ pour tout $n \geq 1$,
- b) Montrer que (a_n) est décroissante,
- c) Conclure que (a_n) converge et calculer sa limite.