Corrigé série 1

Exercice 1. Pour les deux premières lettres, on dispose à chaque fois de 24 possibilités, pour le premier chiffre on dispose de 9 possibilités et pour les 3 chiffres suivants de 10 possibilités. Ainsi il y a

$$24^2 \cdot 9 \cdot 10^3 = 5184000$$

plaques différentes, ce qui signifie qu'il y en a assez pour tous les véhicules.

Exercice 2. Le premier chiffre est de toute façon un 1. Pour le deuxième chiffre il y a deux possibilités, soit il s'agit d'un 0 soit il s'agit d'un 2.

i) Dans le premier cas le nombre s'écrit 10** et il y a donc $10 - 2 = 8$ possibilités pour le troisième chiffre et 7 pour le dernier.

ii) Dans le second cas le nombre s'écrit 12** et il y a 3 possibilités pour le troisième chiffre $(0; 3; 4)$ et donc 7 pour le quatrième.

Ainsi, il y a

$$1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 + 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 = 56 + 21 = 77$$

nombres de la forme cherchée.

Exercice 3. Les treize matchs se terminent chacun sur l'un des trois résultats possibles, il y a donc $3^{13} = 1594323$ pronostics possibles.

Exercice 4.

a) Si aucune restriction n'est mise, il y a 8 possibilités pour la première chaise, 7 pour la deuxième et ainsi de suite. Il y a donc $8! = 40320$ possibilités.

b) En gardant les deux sœurs côte à côte, il y a $7 \cdot 2 = 14$ possibilités pour les placer. Une fois qu'elles sont placées, il y a $6!$ possibilités de placer les personnes restantes. Le nombre total de possibilités est donc $14 \cdot 6! = 10080$.

c) Pour occuper les deux premières chaises, il y a $4 \cdot 2 = 8$ possibilités car il y a quatre couples et on peut à chaque fois inverser les places de l'homme et de la femme. Pour les deux chaises suivantes, il y a $3 \cdot 2 = 6$ possibilités, $2 \cdot 2 = 4$ pour les chaises suivantes et 2 pour les deux dernières chaises. Ainsi, il y a $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384$.

d) Sur la première chaise on place un homme ou une femme, ensuite on alterne les positions des hommes et des femmes. Il y a donc $4! = 24$ possibilités de placer les hommes avec un homme sur la première chaise. Une fois que les quatre hommes sont placés, il y a $4! = 24$ possibilités de placer les femmes entre les hommes. Ainsi il y a $24 \cdot 24$ possibilités. Comme on peut encore commencer par placer une femme sur la première chaise, il faut multiplier par deux et il y a donc $24 \cdot 24 \cdot 2 = 1152$ possibilités.

e) Il y a cinq possibilités pour placer le groupe de quatre hommes. Ce groupe peut être composé de $4!$ manières différentes en permutant les places des hommes à l'intérieur du groupe. Une fois que le groupe de quatre hommes est placé, il y a $4!$ possibilités de placer les quatre femmes. En prenant tout en compte, il y a donc $5 \cdot 4! \cdot 4! = 2880$ possibilités.

f) Les trois seules possibilités pour placer les deux sœurs (symbolisées par deux s) sont les suivantes

$$\square ss \square\square\square\square\square, \quad \square\square\square ss \square\square\square, \quad \square\square\square\square\square ss \square.$$

Il y a donc $3 \cdot 2 = 6$ possibilités de les placer car on peut inverser les places des deux sœurs. Une fois que les deux sœurs sont placées, il n'y a qu'une seule possibilité pour placer leur mari. Il reste donc 2 couples à placer sur les quatre chaises restantes. Comme il y a 8 possibilités pour placer ces deux derniers couples, il y a en tout $6 \cdot 8 = 48$ possibilités.

Exercice 5.

a) Le voyageur a rencontré $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401$ chatons.

b) L'énigme ne fournit pas toutes les informations pour la résoudre. En effet, le narrateur *rencontre* d'autres voyageurs. Si ces voyageurs viennent de St-Ives, seul le narrateur *va* à St-Ives. Mais rien n'empêche les voyageurs d'aller également à St-Ives (deux chemins se rejoignent, créant la rencontre, ou le narrateur est plus rapide et dépasse les voyageurs, *etc.*) ; dans ce cas, la réponse est donnée dans le point suivant. D'autres interprétations sont encore possibles.

c) Si les voyageurs viennent de St-Ives, seul le narrateur y va — et 1 homme, 7 femmes, $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ chats et 2401 chatons, soit $1 + 7 + 343 + 2401 = 2752$ êtres vivants ne vont pas à à St-Ives. Si les voyageurs vont tous à St-Ives, $2752 + 1 = 2753$ êtres vivants vont à à St-Ives

Exercice 6. Il s'agit d'une permutation de 10 avec $5, 2, 3$ répétitions, selon la formule on a

$$\frac{10!}{5!\,2!\,3!} = 2520$$

possibilités. Si on les dispose en cercle, il y a $\frac{2520}{10} = 252$ possibilités.

Exercice 7.

a) Chaque point est en relief ou plat, il y a donc $2^6 = 64$ possibilités. En fait, il y a 63 signes car le signe vide correspond à un espace.

b) Ce n'est pas logique car il reste (en comptant large) 15 symboles pour les chiffres.

Exercice 8.

a) Chaque personne peut choisir 8 étages et donc il y a $8^5 = 32768$ possibilités.

b) Une fois qu'un étage est choisi, la deuxième personne doit choisir un autre étage. La première personne a 8 choix et donc la cinquième en a 4 et il y a $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ possibilités.

c) Dans ce cas il y a $7^5 - 6^5 = 9031$ possibilités car il y a 6^5 possibilités si personne ne descend au premier ou au huitième.

Exercice 9.

Avec ce raisonnement, on multiplie par deux le nombre d'ancêtres à chaque génération. Après 8 générations on arrive donc à $2^8 = 256$ ancêtres, après 20 générations à $2^{20} = 1048576$ ancêtres et après 40 générations à $2^{40} \cong 10^{12}$ ancêtres. Ce résultat n'est pas plausible étant donné qu'au temps de Charlemagne la population mondiale n'excédait guère 250 millions de personnes. La faille dans le raisonnement vient du fait qu'il ne prend pas en compte les liens de parenté entre les ancêtres (cousins,...).

Exercice 10.

Pour chaque vers on a 10 choix, comme il y a 14 vers, il y a 10^{14} poèmes possibles ($10^{14} = 100000 \cdot 10^9 =$ « cent mille milliards »). En lisant un poème en $45 + 15 = 60$ secondes, en un siècle à 8 heures par jour et 200 jours par année, on lirait

$$\frac{100 \cdot 200 \cdot 8 \cdot 3600}{60} = 9,6 \text{ millions},$$

de poèmes. On aurait alors besoin de $\dfrac{10^{14}}{9.6 \cdot 10^6} = 1.041 \cdot 10^7$ siècles, ce qui équivaut à 10 millions de siècles.

En lisant toute la journée et 365 jours par an, il nous faudrait $\dfrac{10^{14} \cdot 60}{365 \cdot 24 \cdot 3600} = 190258751.9$ années, le compte est bon.

Exercice 11.

Chacune des 12 personnes serre la main à 11 autres personnes, il y aurait donc $12 \cdot 11$ poignées de main. Cependant, on compte deux fois chaque poignée de main puisque si A serre la main de B alors B serre la main de A, il faut donc diviser ce nombre par deux. Ainsi, il y a donc $\frac{1}{2} 12 \cdot 11 = 66$ poignées de main. On peut aussi calculer ce total en comptant le nombre de façons différentes de choisir 2 parmi 12, on arrive donc à $C_2^{12} = 66$ poignées de main.

Le nombre de poignées de main entre garçons est égal à $C_2^6 = 15$.

Exercice 12.

$$\begin{aligned}
(3x^2 + y)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (3x^2)^k y^{n-k} \\
&= \binom{5}{0}(3x^2)^0 y^5 + \binom{5}{1}(3x^2)^1 y^4 + \binom{5}{2}(3x^2)^2 y^3 + \binom{5}{3}(3x^2)^3 y^2 + \binom{5}{4}(3x^2)^4 y^1 + \binom{5}{5}(3x^2)^5 y^0 \\
&= y^5 + 15x^2y^4 + 90x^4y^3 + 270x^6y^2 + 405x^8y^1 + 243x^{10}.
\end{aligned}$$