

Corrigé 3

Exercice 1

$$(1) \quad A(x) = \int 16x \cdot (3x - 1) \cdot (2x^3 - x^2 + 2)^7 dx = 8 \int (6x^2 - 2x) \cdot (2x^3 - x^2 + 2)^7 dx \\ = (2x^3 - x^2 + 2)^8 + c$$

$$(2) \quad B(x) = \int 5 \cdot \frac{3}{\cos^2(3x)} - 2 \cdot 5 \cdot \sin(5x) dx = 5 \cdot \tan(3x) + 2 \cdot \cos(5x) + c$$

$$(3) \quad C(x) = \int \frac{7}{x^2 + 9} dx = 7 \cdot \int \frac{1}{9 \left(\frac{x^2}{9} + 1 \right)} dx = \frac{7}{3} \cdot \int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3} \right)^2 + 1} dx \\ = \frac{7}{3} \cdot \arctan \left(\frac{x}{3} \right) + c$$

$$(4) \quad D(x) = -7 \int (5 - 2x)^{\frac{3}{4}} dx = \frac{-7}{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{4}{7} \cdot \int (-2) \cdot \frac{7}{4} \cdot (5 - 2x)^{\frac{3}{4}} dx \\ = 2 \cdot (5 - 2x)^{\frac{7}{4}} + c = 2 \cdot (5 - 2x) \cdot \sqrt[4]{(5 - 2x)^3} + c$$

Exercice 2

Démontrer la proposition :

Si f est une fonction impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors toutes ses primitives sont paires sur $\mathbb{R}$.

f impaire sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et le graphe de f a pour centre de symétrie l'origine O.

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\int_{-t}^0 f(x) dx = - \int_0^t f(x) dx$ et pour toute primitive F de f , on a

$$F(0) - F(-t) = \int_{-t}^0 f(x) dx = - \int_0^t f(x) dx = -(F(t) - F(0)), \text{ ce qui implique } F(-t) = F(t).$$

Exercice 3

A partir du temps $t = 0$, on verse de l'eau dans un récipient initialement vide avec un débit instantané $d(t) = 2t$ litres par minute.

Simultanément, une partie de cette eau s'échappe avec un débit instantané $v(t) = t^2$ litres par minute, par un trou situé au fond du récipient. é

- (1) Le débit instantané total au temps t = débit entrant - débit sortant $= 2t - t^2 = f(t)$ qui est une fonction continue et bornée sur $[0,1]$.

En découpant l'intervalle $[0,1]$ en n intervalles $[t_{i-1}, t_i]$ tel que $t_i = \frac{i}{n}$, avec $i = 1, 2, \dots, n$, on calcule que le volume d'eau contenu dans le récipient après 1 minute vaut :

$$V_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \frac{1}{n} = \int_0^1 2t - t^2 dt = \left[t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \text{ soit } 0.667 \text{ litre environ.}$$

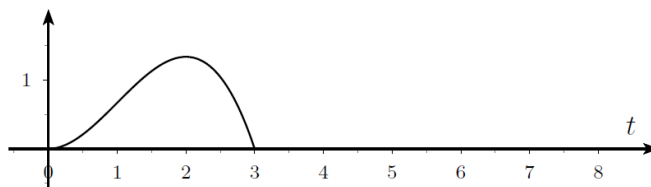
- (2) $V'(t) = 2t - t^2 = t(2 - t)$ s'annule en $t = 0$ et $t = 2$. V' est positif sur $[0; 2]$, négatif sinon.

Donc, $V(t)$ est minimal en $t = 0$ et maximal en $t = 2$.

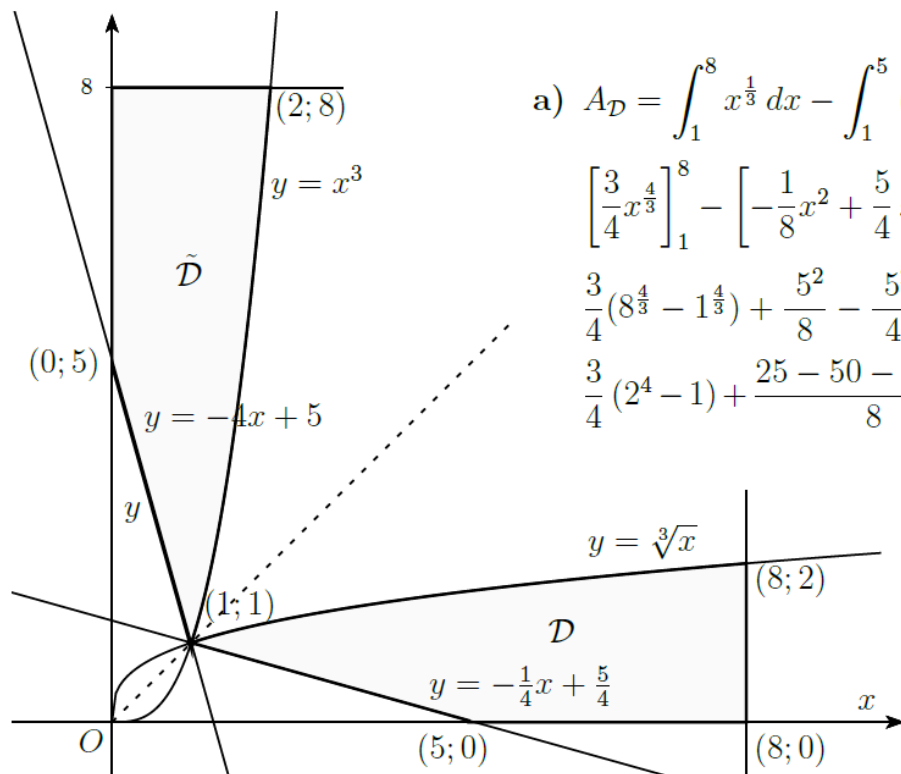
- (3) $V(t) = \int_0^t 2x - x^2 dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^t = t^2 - \frac{t^3}{3} = t^2 \left(1 - \frac{t}{3} \right)$ s'annule en $t = 0$ et $t = 3$.

Le récipient est à nouveau vide après 3 minutes. Pour $t > 3$, le débit entrant est inférieur au débit sortant. Donc, ces données ne font plus sens.

- (4) Esquisser du graphe de la fonction V exprimant le volume d'eau contenu dans le récipient en fonction du temps t mesuré en minute, pour t compris entre 0 et l'instant où le récipient est à nouveau vide.



Exercice 4



$$\begin{aligned}
 \text{a) } A_{\mathcal{D}} &= \int_1^8 x^{\frac{1}{3}} dx - \int_1^5 \left(-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \right) dx = \\
 &= \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} \right]_1^8 - \left[-\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x \right]_1^5 = \\
 &= \frac{3}{4}(8^{\frac{4}{3}} - 1^{\frac{4}{3}}) + \frac{5^2}{8} - \frac{5^2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{5}{4} = \\
 &= \frac{3}{4}(2^4 - 1) + \frac{25 - 50 - 1 + 10}{8} = \frac{45}{4} - 2 = \frac{37}{4}
 \end{aligned}$$

- b) $\tilde{\mathcal{D}}$, le symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à la première bissectrice est borné par les graphes des fonctions ${}^r f(x) = x^3$, ${}^r g(x) = -4x + 5$, l'axe Oy et la droite d'équation $y = 8$. D'où,

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{\pi} &= \int_0^2 8^2 dx - \int_0^1 (-4x + 5)^2 dx - \int_1^2 x^6 dx = [64x]_0^2 - \left[\frac{1}{-12}(-4x + 5)^3 \right]_0^1 - \\
 &= \left[\frac{x^7}{7} \right]_1^2 = \\
 128 + \frac{1}{12}(1 - 5^3) - \frac{2^7 - 1}{7} &= 128 - \frac{31}{3} - \frac{127}{7} = \frac{2688 - 217 - 381}{21} = \frac{2029}{21}.
 \end{aligned}$$

Ainsi le volume de révolution de $\mathcal{D}$ autour de Oy est égal à $\frac{2029\pi}{21}$.

Exercice 5

(1) Volume de la boule $V(t) = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d(t)}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi d(t)^3$ d'où $V'(t) = \frac{1}{2}\pi d(t)^2 d'(t)$.

Aire de la surface externe de la boule : $A(t) = 4\pi \left(\frac{d(t)}{2}\right)^2 = \pi d(t)^2$

Comme $V'(t) = k \cdot A(t)$, il vient $\frac{1}{2} d'(t) = k \Leftrightarrow d'(t) = 2k$

En intégrant, on obtient $d(t) = 2kt + c$.

Comme $d(0) = 20$, $c = 20$. Puis comme $d(6) = 12k + 20 = 16$, $k = -\frac{1}{3}$.

Ainsi, finalement, $d(t) = -\frac{2}{3}t + 20$

(2) $-\frac{2}{3}t + 20 = 10 \Leftrightarrow \frac{2}{3}t = 10 \Leftrightarrow t = 15$ mois

(3) $-\frac{2}{3}t + 20 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}t = 20 \Leftrightarrow t = 30$ mois

Exercice 6

Cinématique

La vitesse de chute de la pierre, définie sur $[0, t_c]$, vaut

$$v(t) = v(0) + \int_0^t 9.8 dx = 0 + 9.8t, \quad t \in [0, t_c].$$

La distance parcourue après t secondes vaut

$$d(t) = d(0) + \int_0^t 9.8 x dx = 0 + \frac{9.8}{2} t^2 = 4.9 t^2, \quad t \in [0, t_c]$$

Ainsi, on peut écrire

$$d(t_c) = h \iff 4.9 t_c^2 = h \quad (1)$$

La distance parcourue par le son t secondes après l'impact vaut $m(t) = 330 t$.

Le son est perçu $5.6 - t_c$ seconde après l'impact, d'où la relation

$$m(5.6 - t_c) = h \iff 330 (5.6 - t_c) = h \quad (2)$$

Il suit de (1) et (2) que

$$h = 4.9 t_c^2 = 330 (5.6 - t_c) \Rightarrow 4.9 t_c^2 + 330 t_c - 1848 = 0 \Leftrightarrow t_c \simeq \frac{-330 \pm \sqrt{145121}}{9.8}.$$

Comme $t_c > 0$, on ne garde que la solution positive, soit

$t_c \simeq \frac{-330 + \sqrt{145121}}{9.8} \simeq 5.2 \text{ secondes.}$
--

La hauteur de chute vaut

$h = 4.9 \cdot 5.2^2 = 132.43 \text{ mètres.}$
--

en n parties de longueur $\Delta x = \frac{6}{n}$.

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot (9 - x_i^2)^2 \cdot \Delta x \right) = \\ \frac{1}{2} \int_{-3}^3 (x^2 - 9)^2 dx &= \int_0^3 (x^4 - 18x^2 + 81) dx = \\ \left[\frac{x^5}{5} - 6x^3 + 81x \right]_0^3 &= \frac{3^5}{5} - 6 \cdot 3^3 + 81 \cdot 3 = \\ \frac{243}{5} + 81 &= \frac{243 + 405}{5} = \frac{648}{5}. \end{aligned}$$