Corrigé 3

Applications à la physique

Exercice 1 (Cinématique)**.**
La vitesse de chute de la pierre, définie sur $[0, t_c]$*, vaut*

$$v(t) = v(0) + \int_0^t 9.8 dx = 0 + 9.8t, \quad t \in [0, t_c].$$

La distance parcourue après t *secondes vaut*

$$d(t) = d(0) + \int_0^t 9.81\, x\, dx = 0 + \frac{9.8}{2}\, t^2 = 4.9\, t^2, \quad t \in [0, t_c]$$

Ainsi, on peut écrire

$$d(t_c) = h \iff 4.9\, t_c^2 = h \tag{1}$$

La distance parcourue par le son t *secondes après l'impact vaut* $m(t) = 330\, t$*.*
Le son est perçu $5.6 - t_c$ *seconde après l'impact, d'où la relation*

$$m(5.6 - t_c) = h \iff 330\,(5.6 - t_c) = h \tag{2}$$

Il suit de (1) et (2) que

$$h = 4.9\, t_c^2 = 330\,(5.6 - t_c) \;\Rightarrow\; 4.9\, t_c^2 + 330\, t_c - 1848 = 0 \;\Leftrightarrow\; t_c \simeq \frac{-330 \pm \sqrt{145121}}{9.8}.$$

Comme $t_c > 0$*, on ne garde que la solution positive, soit* $t_c \simeq \dfrac{-330 + \sqrt{145121}}{9.8} \simeq 5.2$ *secondes.*

La hauteur de chute vaut $h = 4.9 \cdot 5.2^2 = 132.43$ *mètres.*

Exercice 2.

(1) Volume de la boule $V(t) = \dfrac{4}{3}\pi \left(\dfrac{d(t)}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{6}\pi d(t)^3$ *d'où* $V'(t) = \dfrac{1}{2}\, \pi\, d(t)^2\, d'(t)$*.*

Aire de la surface externe de la boule : $A(t) = 4\pi \left(\dfrac{d(t)}{2}\right)^2 = \pi d(t)^2$

Comme $V'(t) = k \cdot A(t)$*, il vient* $\dfrac{1}{2}\, d'(t) = k \;\Leftrightarrow\; d'(t) = 2k$

En intégrant, on obtient $d(t) = 2kt + c$.

Comme $d(0) = 20,\ c = 20$. *Puis comme* $d(6) = 12k + 20 = 16,\ k = -\dfrac{1}{3}$.

Ainsi, finalement, $d(t) = -\dfrac{2}{3}t + 20$

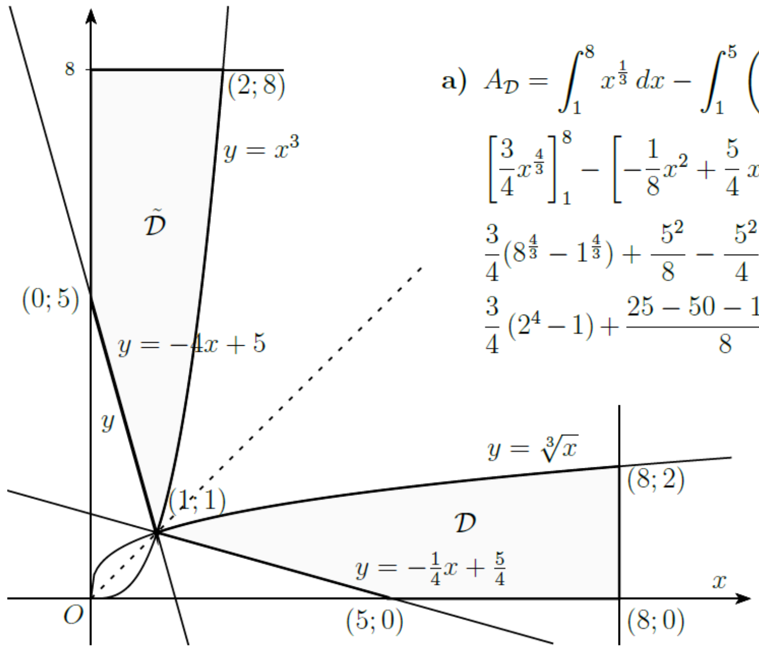
(2) $-\dfrac{2}{3}t + 20 = 10 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{2}{3}t = 10 \ \Leftrightarrow\ t = 15$ *mois*

(3) $-\dfrac{2}{3}t + 20 = 0 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{2}{3}t = 20 \ \Leftrightarrow\ t = 30$ *mois*

Exercices de révision

Exercice 3.

a) *Commençons par calculer l'aire du domaine* $\mathcal{D}$ *:*



a) $A_{\mathcal{D}} = \displaystyle\int_1^8 x^{\frac{1}{3}}\,dx - \int_1^5 \left(-\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}\right)\,dx =$

$\left[\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8 - \left[-\dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{5}{4}x\right]_1^5 =$

$\dfrac{3}{4}(8^{\frac{4}{3}} - 1^{\frac{4}{3}}) + \dfrac{5^2}{8} - \dfrac{5^2}{4} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{5}{4} =$

$\dfrac{3}{4}\,(2^4 - 1) + \dfrac{25 - 50 - 1 + 10}{8} = \dfrac{45}{4} - 2 = \dfrac{37}{4}$

b) $\tilde{\mathcal{D}}$*, le symétrique de* $\mathcal{D}$ *par rapport à la première bissectrice est borné par les graphes des fonctions* $^rf(x) = x^3$ *,* $^rg(x) = -4x + 5$*, l'axe* Oy *et la droite d'équation* $y = 8$. *D'où,*

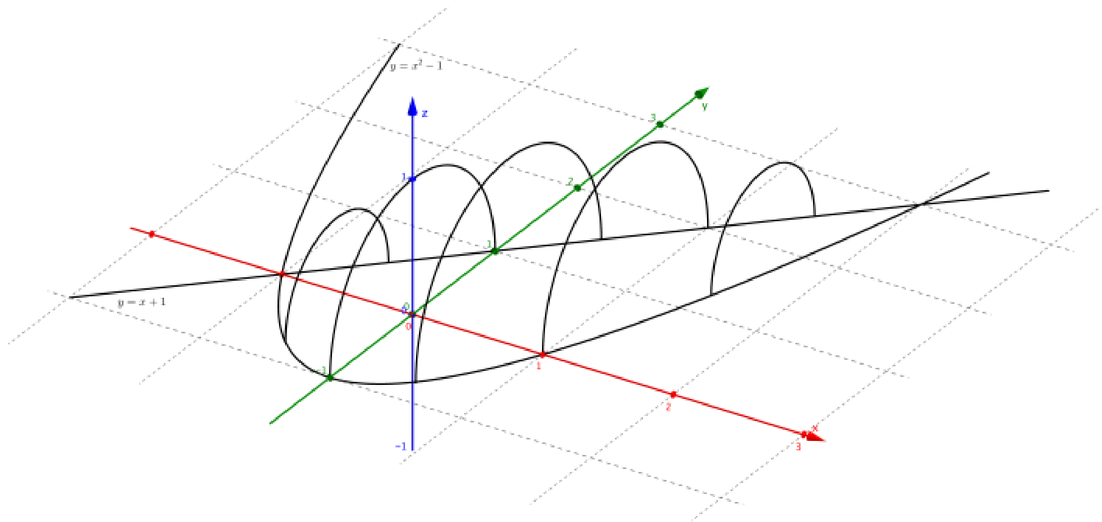
$$\frac{V}{\pi} = \int_0^2 8^2 dx - \int_0^1 (-4x+5)^2\,dx - \int_1^2 x^6 dx = [64x]_0^2 - \left[\frac{1}{-12}(-4x+5)^3\right]_0^1 - \left[\frac{x^7}{7}\right]_1^2 =$$

$$128 + \frac{1}{12}(1 - 5^3) - \frac{2^7 - 1}{7} = 128 - \frac{31}{3} - \frac{127}{7} = \frac{2688 - 217 - 381}{21} = \frac{2029}{21}.$$

Ainsi le volume de révolution de $\mathcal{D}$ autour de Oy est égal à $\dfrac{2029\,\pi}{21}$.

Exercice 4.

(1) Esquisse du solide $\mathcal{S}$ *:*



(2) Les deux courbes considérées s'intersectent lorsque

$$\begin{aligned} x+1 = x^2-1 &\Leftrightarrow x+1-(x+1)(x-1)=0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(2-x)=0 \\ &\Leftrightarrow x=-1 \ \textit{ou}\ x=2. \end{aligned}$$

La section perpendiculaire à l'axe Ox passant par l'abscisse x forme un demi-cercle dont le diamètre est

$$d(x) = x+1-(x^2-1) = -x^2+x-2.$$

On considère la partition régulière d'ordre n de l'intervalle $[-1,2]$. On découpe le volume en tranches d'épaisseur $\delta_i = x_i - x_{i-1}$. On approxime le volume de chacune de ces tranches par

$$V_i = \pi\left(\frac{d(x_i)}{2}\right)^2 \delta_i = \pi\left(\frac{-x_i^2+x_i+2}{2}\right)^2 \delta_i.$$

Le volume du solide $\mathcal{S}$ est donné par

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \pi\left(\frac{-x_i^2+x_i+2}{2}\right)^2 \delta_i.$$

Puisque la fonction $\pi\left(\frac{-x^2+x+2}{2}\right)^2$ *est intégrable sur l'intervalle* $[-1,2]$, *on trouve finalement*

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{2} \pi \left(\frac{-x^2+x+2}{2}\right)^2 \ dx \\ &= \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{2} \left(x^4-2x^3-3x^2-4x+4\right) \ dx \\ &= \frac{\pi}{4}\frac{81}{10}. \end{aligned}$$

Exercice 5.

(1)

$$\begin{aligned} \int 16x\cdot(3x-1)\cdot(2x^3-x^2+2)^7 \ dx &= 8\int(6x^2-2x)\cdot(2x^3-x^2+2)^7 \ dx \\ &= (2x^3-x^2+2)^8+c \end{aligned}$$

(2)

$$\int 5\cdot\frac{3}{\cos^2(3x)}-2\cdot 5\cdot\sin(5x)\,dx = 5\cdot\tan(3x)+2\cdot\cos(5x)+c$$

(3)

$$\begin{aligned} \int \frac{7}{x^2+9} \ dx =& \ 7\cdot\int\frac{1}{9\left(\frac{x^2}{9}+1\right)} \ dx \\ =& \ \frac{7}{3}\cdot\int\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} \ dx \\ =& \ \frac{7}{3}\cdot\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} -7\int(5-2x)^{\frac{3}{4}} \ dx =& \ \frac{-7}{-2}\cdot\frac{4}{7}\cdot\int(-2)\cdot\frac{7}{4}\cdot(5-2x)^{\frac{3}{4}} \ dx \\ &= 2\cdot(5-2x)^{\frac{7}{4}}+c \\ &= 2\cdot(5-2x)\cdot\sqrt[4]{(5-2x)^3}+c \end{aligned}$$

Exercice 6.

f impaire sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ et le graphe de f a pour centre de symétrie l'origine O.

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_{-t}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{t} f(x)\,dx$ et pour toute primitive F de f, on a

$F(0) - F(-t) = \displaystyle\int_{-t}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{t} f(x)\,dx = -(F(t) - F(0))$, ce qui implique $F(-t) = F(t)$.