3.1 Volume d'un corps de révolution

Théorème 3.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit K le corps de révolution obtenu en faisant tourner le graphe de f autour de l'axe Ox. Le volume de K est donné par*

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 \, dx.$$

Démonstration. On considère la subdivision régulière $\sigma_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ d'ordre n. On commence par chercher à approximer le volume de chacune des tranches K_i obtenues en faisant tourner le graphe de f entre x_{i-1} et x_i autour de l'axe Ox.

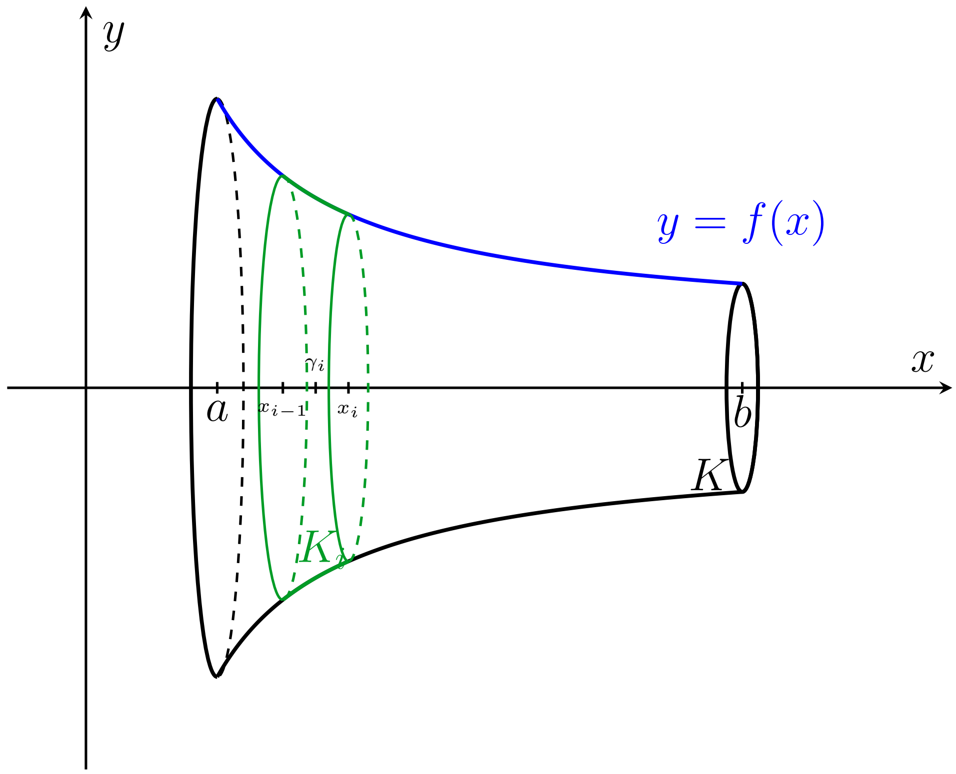

Figure 7 – Corps de révolution K.

On approxime le volume de la tranche K_i par le volume du cylindre C_i d'épaisseur $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ et de rayon $r_i = f(\gamma_i)$, pour un $\gamma_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

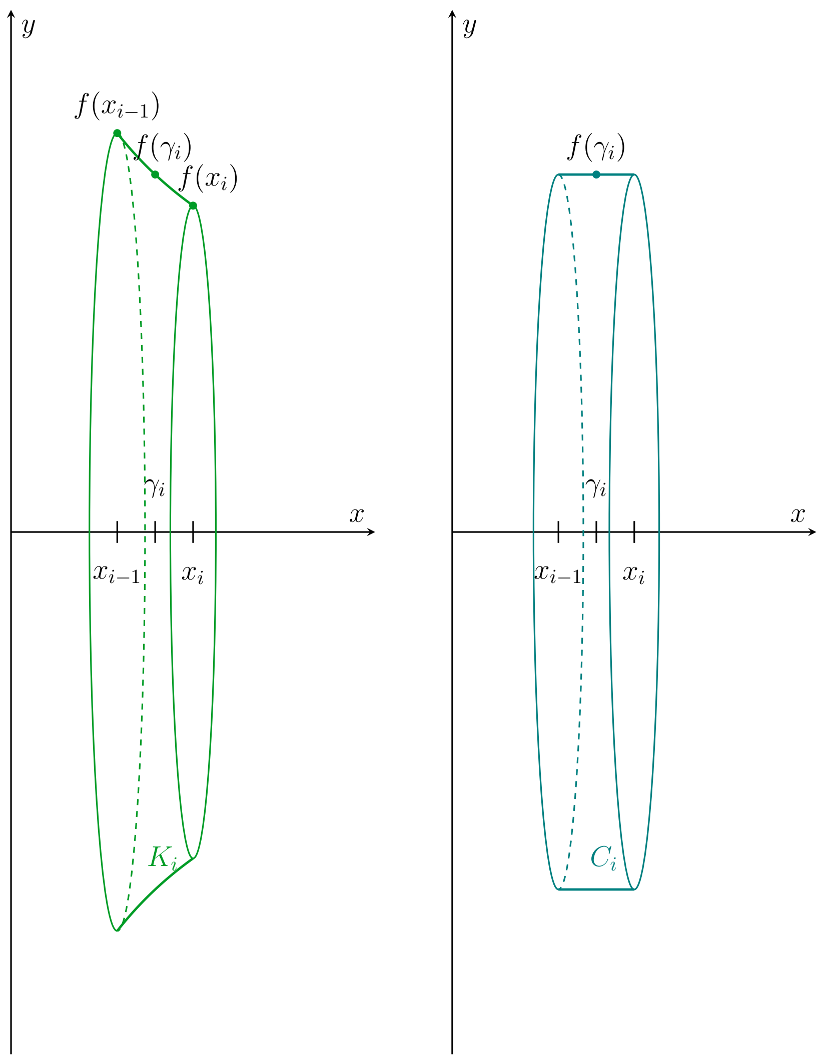

FIGURE 8 – Portion de volume K_i et cylindre C_i.

L'aire de la base de C_i vaut

et le volume de C_i est égal à

Une approximation du volume V de K est obtenue en sommant le volume de chacun des cylindres ; cette approximation devient de plus en plus précise à mesure que n devient grand. A la limite, on a

Puisque f est continue, la fonction πf^2, l'est aussi et est donc intégrable. Ainsi,

Le "volume élémentaire" a pour expression $dV = A(x)dx = \pi r^2 dx = \pi(f(x))^2 dx$, et le volume V s'obtient en sommant tous les volumes élémentaires. $\square$

Exemple 3.2. *Une boule de rayon r s'obtient en faisant tourner autour de l'axe Ox le graphe de la fonction $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Le volume de la boule est donc donné par*

3.2 Volume d'un corps de sections d'aires connues

L'intégrale de Riemann peut également être utilisée pour calculer le volume de corps qui ne sont pas des corps de révolution, mais dont on connaît l'aire des sections perpendiculaires à un axe du repère cartésien. Un exemple est donné ci-dessous.

Exemple 3.3. *On considère le solide K*

- *contenu dans le demi-espace supérieur $\{(x, y, z) \subseteq \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$;*
- *dont la base est le disque $D = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$;*
- *dont les sections transversales perpendiculaires à l'axe Ox sont des triangles équilatéraux.*

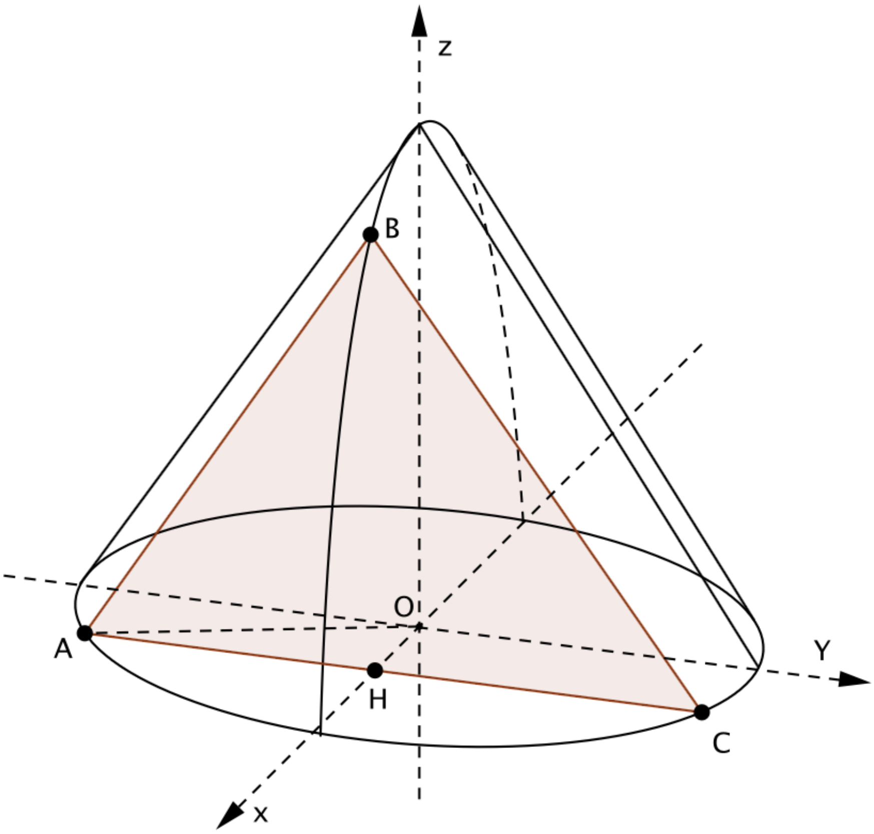

Figure 9 – Volume K de sections d'aires connues.

On cherche à calculer le volume de K. Pour ce faire on considère la partition $\{x_0, x_1, \ldots, x_{2n}\}$ de l'intervalle $[-1, 1]$, donnée par $x_i = -1 + \frac{i}{n}$.
Commençons par calculer l'aire de la section transversale T_i passant par l'abscisse x_i. Cette section est un triangle équilatéral, dont la longueur d'un côté est

La hauteur du triangle T_i vaut

et l'aire de ce triangle est donc égale à

Pour approximer le volume de K, on découpe le solide en $2n$ tranches, perpendiculaires à l'axe Ox, et d'épaisseur $\delta_i = \frac{1}{n}$. Le volume d'une de ces tranches est donné par $V_i = A_i\delta_i$ et le volume total V peut être approché par

Puisque la fonction $\sqrt{3}(1-x^2)$ est continue sur $[-1,1]$, elle est intégrable. On trouve donc finalement

3.3 Surface d'un corps de révolution

Théorème 3.2. *Soit f une fonction réelle, positive et continûment dérivable au voisinage de l'intervalle $[a,b]$. L'aire A de la surface de révolution Σ obtenue en faisant tourner le graphe de f autour de l'axe Ox vaut*

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Démonstration. On considère la partition régulière d'ordre n de $[a,b]$, σ_n. On commence par chercher à approximer l'aire de chacune des tranches Σ_i obtenues en faisant tourner le graphe de f entre x_{i-1} et x_i autour de l'axe Ox.

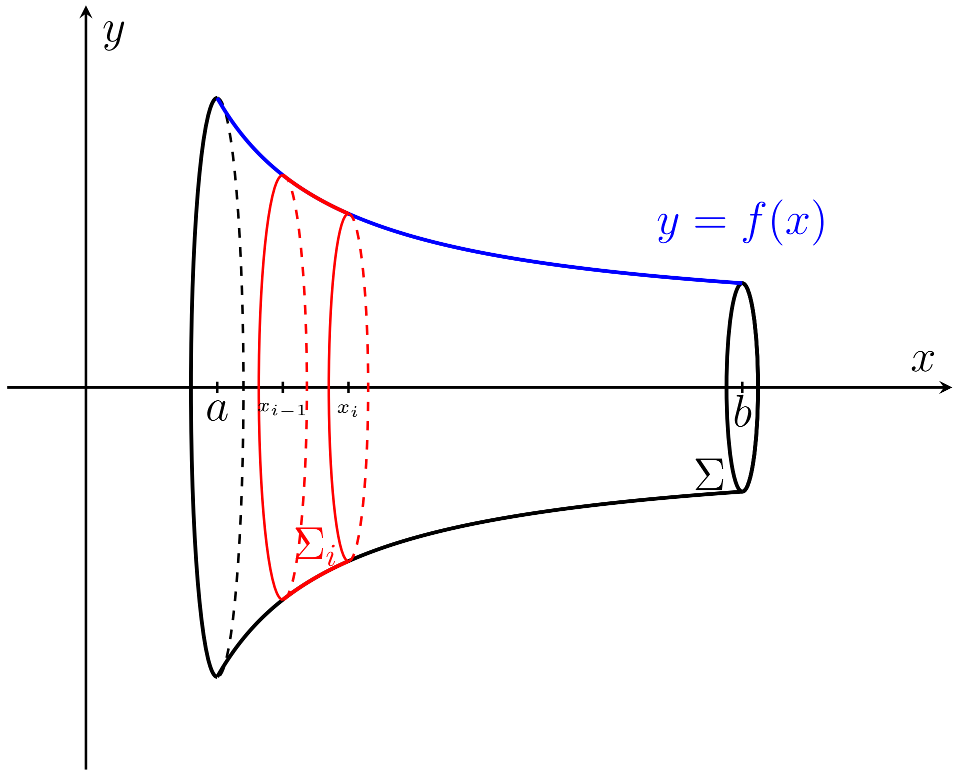

FIGURE 10 – Surface de révolution Σ.

Pour ceci, on approxime l'aire de Σ_i par l'aire du cône tronqué C_i obtenu en faisant tourner autour de l'axe Ox le segment joignant les points $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ et $(x_i, f(x_i))$.

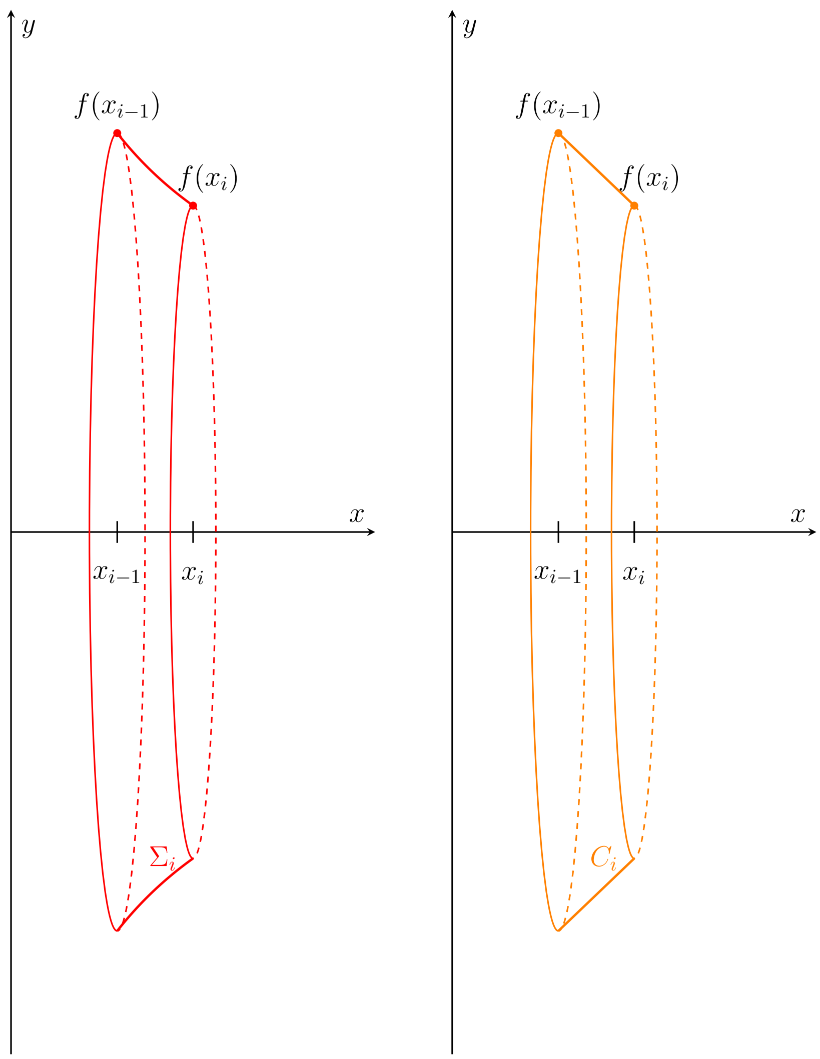

FIGURE 11 – Portion de surface Σ_i et cône tronqué C_i.

La longueur de ce segment vaut

$$\ell_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

L'aire latérale du cône tronqué C_i vaut donc (c.f. Série 2)

$$\begin{aligned} A_i &= 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \ell_i \\ &= 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}, \end{aligned}$$

où $\dfrac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}$ correspond au rayon moyen du cône tronqué.

Par le Théorème des Accroissements Finis, il existe $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tel que

et par le Théorème de la Valeur Intermédiaire, il existe $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tel que

On peut donc ré-écrire

L'aire de Σ est obtenue en sommant l'aire de chacun des cônes tronqués, et en prenant la limite lorsque n tend vers l'infini, c'est-à-dire

Il nous reste donc a montrer que la limite ci-dessus vaut $\displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$. Pour ceci, on ré-écrit

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(y_i)(x_i - x_{i-1})\sqrt{1+(f'(z_i))^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(z_i)(x_i - x_{i-1})\sqrt{1+(f'(z_i))^2}\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{i=1}^{n} 2\pi\left(f(y_i)-f(z_i)\right)(x_i - x_{i-1})\sqrt{1+(f'(z_i))^2}\right].
\end{aligned}$$

Puisque f et f' sont continues, la fonction $2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}$ est intégrable, et donc

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(z_i)(x_i - x_{i-1})\sqrt{1+(f'(z_i))^2} = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Pour conclure, on montre que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi\left(f(y_i) - f(z_i)\right)(x_i - x_{i-1})\sqrt{1+(f'(z_i))^2} = 0,$$

ou, de manière équivalente que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} 2\pi\left(f(y_i) - f(z_i)\right)(x_i - x_{i-1})\sqrt{1+(f'(z_i))^2}\right| < \epsilon.$$

Soit donc $\epsilon > 0$ fixé. Puisque f' est continue, il existe $M > 0$ tel que $\sqrt{1+(f'(x))^2} \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$. De plus, par continuité de f, on peut choisir N de sorte à ce que, pour tous $x, y \in [a,b]$ tels que $|x-y| \leq \dfrac{b-a}{N}$, $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\epsilon}{2\pi(b-a)M}$. Pour $n \geq N$, on a alors

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} 2\pi\left(f(y_i) - f(z_i)\right)(x_i - x_{i-1})\sqrt{1+(f'(z_i))^2}\right| &< \sum_{i=1}^{n} 2\pi\frac{\epsilon}{2\pi(b-a)M}(x_i - x_{i-1})M \\ &< \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 3.4 (Cône de révolution)**.** *Un cône droit de hauteur* h *et dont le rayon de la base vaut* r *s'obtient en faisant tourner autour de l'axe* Ox *la fonction* $f : [0, h] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \frac{rx}{h}$. *En utilisant le Théorème 3.2, on obtient que l'aire du cône vaut*

Exemple 3.5 (Sphère)**.** *Une sphère de rayon* r *s'obtient en faisant tourner autour de l'axe* Ox *le graphe de la fonction* $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. *La dérivée de cette fonction vaut*

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

et

$$1 + (f'(x))^2 = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

Par le Théorème 3.2, l'aire de la sphère vaut donc

4 Applications à la physique

4.1 Travail d'une force non constante

Cette partie est tirée du *Fundamentum de mathématique d'analyse 25*[1].

En physique, le travail d'une force constante exercée dans le sens d'un déplacement est égale au produit de l'intensité de la force par la longueur du déplacement, c'est-à-dire

$$W = F \cdot d.$$

Le travail s'exprime en Joules, ce qui correspond à des Newtons fois des mètres.

Exemple 4.1. *Un sac de poids* $F = 20$ $[N]$ *est initialement posé sur le sol. Quel travail doit-on fournir pour le soulever jusqu'à une hauteur de* 30 $[m]$ *?*

Que se passe-t-il maintenant si le sac est troué et qu'il se vide, c'est-à-dire si son poids diminue à mesure qu'on le soulève ?

Exemple 4.2. *Un sac de poids* $F = 20$ $[N]$ *est initialement posé sur le sol. Ce sac est troué, si bien que lorsqu'on le soulève du sol à vitesse constante, il se vide. On suppose que son poids diminue de manière constante, et que le sac est vide lorsqu'il atteint une hauteur de* 30 $[m]$*. Quel travail doit-on fournir pour le soulever de* 0 *à* 30 $[m]$?

1. *Fundamentum de mathématique d'analyse*, CRM 25, Editions du Tricorne, 2006

Puisque le sac pèse 20 $[N]$ *au sol,* 0 $[N]$ *à 30 mètres du sol, et qu'il se vide à vitesse constante, le poids du sac à une hauteur* $h \in [0, 30]$ *vaut*

On considère σ_n *la partition régulière de l'intervalle* $[0, 30]$. *On approxime* W_i, *le travail nécessaire à soulever la sac entre* x_{i-1} *et* x_i, *par*

$$W_i \approx p(x_i)\delta_i.$$

Le travail total est donc approximé par

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\delta_i.$$

Puisque p *est une fonction continue, on trouve, en prenant la limite lorsque* n *tend vers l'infini*

On a le résultat général suivant :

Proposition 4.1. *Le travail d'une force* F *exercée dans le sens d'un déplacement en ligne droite d'un point* x_1 *à un point* x_2 *vaut*

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\ dx.$$