Cours Euler, 4^e année

Intégration

1 Rappels

Cette section est principalement tirée des supports de cours d'Intégration de M. Schneider (2021-2022) et de N. Pointet (2023-2024).

Définition 1.1. *Etant donné un intervalle $[a, b]$, une subdivision de $[a, b]$ est un ensemble de points $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tels que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Pour $i = 1, \ldots, n$, on note $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ la longueur de l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Le pas de la subdivision est défini par $\delta_\sigma = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \delta_i$.*

Définition 1.2. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée et soit σ une subdivision de $[a, b]$. La somme de Darboux inférieure $s_\sigma(f)$ et la somme de Darboux supérieure $S_\sigma(f)$ sont définies par*

$$s_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)\delta_i$$

$$S_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)\delta_i.$$

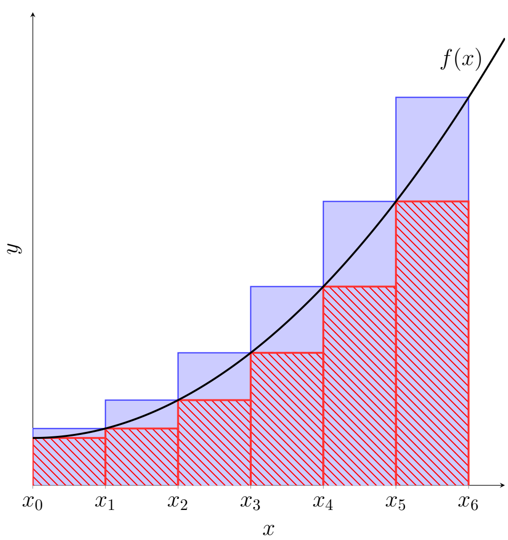

Figure 1 – Exemple de sommes de Darboux inférieure (rouge) et supérieure (bleue).

Définition 1.3. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *bornée. On définit*

$$s(f) = \sup_{\sigma} s_{\sigma}(f)$$
$$S(f) = \inf_{\sigma} S_{\sigma}(f).$$

Le sup et l'inf sont ici pris sur toutes les subdivisions de l'intervalle $[a, b]$.

Définition 1.4. *Une fonction bornée* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est dite* <u>*intégrable*</u> *(au sens de Darboux) si* $s(f) = S(f)$. *On pose dans ce cas*

$$\int_a^b f(x)\ dx = s(f) = S(f).$$

Proposition 1.1. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue. Alors* f *est intégrable.*

Proposition 1.2. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *bornée. Alors* f *est intégrable si et seulement s'il existe une suite de subdivisions* $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *dont les pas tendent vers* 0 *telle que*

$$\lim_{k \to \infty} s_{\sigma_k}(f) = \lim_{k \to \infty} S_{\sigma_k}(f).$$

De plus si une telle subdivision existe, alors

$$\lim_{k \to \infty} s_{\tilde{\sigma}_k}(f) = \lim_{k \to \infty} S_{\tilde{\sigma}_k}(f)$$

pour toute suite de subdivisions $\{\tilde{\sigma}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *dont les pas tendent vers* 0.

Théorème 1.1 (Théorème de la moyenne)**.** *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors il existe* $c \in [a, b]$ *tel que*

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b - a) f(c).$$

Définition 1.5. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Une* <u>*primitive*</u> *de* f *est une fonction continue* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dont la dérivée vaut* f, *c'est-à-dire telle que* $F'(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in [a, b]$.

Théorème 1.2. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue.*
La fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

est une primitive de f.

Théorème 1.3 (Théorème fondamental du calcul intégral)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors*

$$\int_a^b f(x)\ dx = G(b) - G(a).$$

Proposition 1.3. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $g, h : I \to [a, b]$ des fonctions dérivables sur I. Alors la fonction*

$$K(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\ dt$$

est dérivable et pour tout $x \in I$, on a

$$K'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x).$$

Définition 1.6. *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$. On dit que <u>l'intégrale généralisée</u> $\int_a^{b^-} f(t)\ dt$ <u>existe/converge</u> si la limite $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\ dt$ existe. On pose alors par définition*

$$\int_a^{b^-} f(t)\ dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\ dt.$$

Si la limite n'existe pas, on dit que <u>l'intégrale généralisée diverge</u>.
(Les définitions sont similaires si $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ ou $f :]a, b[\to \mathbb{R}$.)

2 Intégrale de Riemann

On introduit ici la notion d'intégrale de Riemann. Cette notion est équivalente à la notion d'intégrale de Darboux, mais peut être plus facile à manipuler pour démontrer les propriétés des intégrales. Cette section est tirée du cours d'Intégration de N. Pointet

2.1 Sommes de Riemann

Définition 2.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et soit $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. Une <u>somme de Riemann</u> est une expression de la forme*

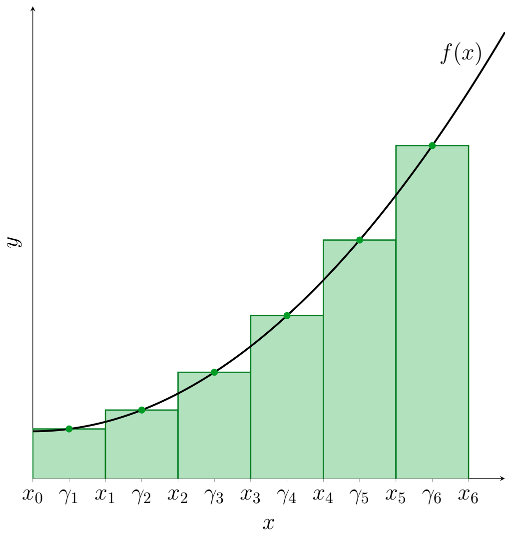

FIGURE 2 – Exemple de somme de Riemann.

Remarque 2.1. *Les sommmes de Darboux sont donc des cas particuliers de sommes de Riemann.*

Définition 2.2. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et soit $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de subdivisions dont les pas tendent vers 0. La fonction f est intégrable au sens de Riemann si la limite*

$$\lim_{k\to\infty} R_{\sigma_k}(f)$$

existe et ne dépend ni des subdivisions σ_k ni des points γ_i^k de chaque subdivision. Dans ce cas l'intégrale au sens de Riemann de f est définie comme $\lim\limits_{k\to\infty} R_{\sigma_k}(f)$.

Proposition 2.1. *Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann si et seulement si elle est intégrable au sens de Darboux (et la valeur des deux intégrales est la même).*

Démonstration. Voir Série 1. □

2.2 Intégrales de fonctions continues par morceaux

Définition 2.3. *Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux s'il existe une partition de $[a,b]$ $\sigma = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ et n fonctions continues $f_i : [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $x \in]a_{i-1}, a_i[$, on ait $f(x) = f_i(x)$.*

Proposition 2.2. *Si f est continue par morceaux, alors f est intégrable et*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(x)\ dx.$$

Remarque 2.2. *Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues par morceaux, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $c \in [a, b]$ on a encore*

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx &= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx \\
\int_a^b \lambda f(x)\ dx &= \lambda \int_a^b f(x)\ dx \\
\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)|\ dx \\
\int_a^b f(x)\ dx &= \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.
\end{aligned}$$

Remarque 2.3. *Par contre, le théorème de la moyenne n'est en général pas vrai pour les fonctions continues par morceaux ! On peut, pour s'en convaincre, considérer la fonction $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

2.3 Aires de surfaces planes

Définition 2.4. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui change de signe un nombre fini de fois. L'aire algébrique de la surface délimitée par le graphe de f et l'axe Ox entre a et b est donnée par $\int_a^b f(x)\ dx$. L'aire géométrique de la surface délimitée par le graphe de f et l'axe Ox entre a et b est donnée par $\int_a^b |f(x)|\ dx$.*

Exemple 2.1. *On considère la fonction* $\sin : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$.

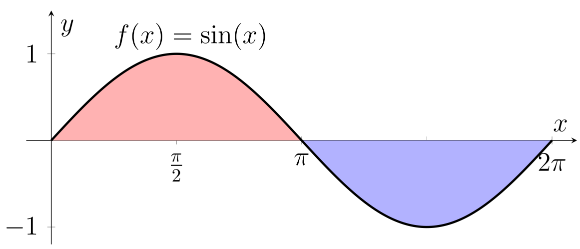

FIGURE 3 – Graphe de $f(x) = \sin(x)$ entre 0 et 2π.

L'aire algébrique de la surface déterminée par son graphe est

L'aire géométrique de la surface déterminée par son graphe est

Au lieu de calculer l'aire entre le graphe de f et l'axe Ox, on peut aussi calculer l'aire du domaine défini par le graphe de deux fonctions ; c'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(x) = g(x)$ en un nombre fini de points. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ défini par*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \min\{f(x), g(x)\} \leq y \leq \max\{f(x), g(x)\}\right\}.$$

L'aire géométrique du domaine D vaut $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$.

2.4 Intégrale de la fonction inverse $f(t) = \dfrac{1}{t}$

On considère la fonction $A : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Notons que A est bien définie puisque la fonction $f(t) = \dfrac{1}{t}$ est continue entre 1 et x pour tout $x > 0$. La proposition suivante liste certaines des propriétés de A :

Proposition 2.4.

1. *A est continue.*
2. $A(x) \begin{cases} > 0 & si\ x > 1 \\ = 0 & si\ x = 1 \\ < 0 & si\ x < 1. \end{cases}$
3. *A est une fonction strictement croissante.*
4. *A est concave.*
5. *Pour tous* $k, x \in \mathbb{R}_+^*$, *on a* $A(kx) = A(k) + A(x)$.
6. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *et tout* $r \in \mathbb{R}$, *on a* $A(x^r) = rA(x)$.
7. *A est injective.*
8. *A est surjective.*
9. *A admet une fonction inverse* $A^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

1. Découle du fait que $f(t) = \dfrac{1}{t}$ est continue entre 1 et x pour tout $x > 0$.
2. Découle du fait que $\dfrac{1}{t} > 0$ pour tout $t > 0$.
3. On a $\dfrac{d}{dx}A(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$.
4. On a $\dfrac{d^2}{dx^2}A(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.
5. Commençons par calculer $\dfrac{d}{dy}A(ky)$:

6. Commençons par calculer $\frac{d}{dy}A(y^r)$:

7. Puisque A est strictement croissante, elle est injective.
8. On commence par montrer que $\lim_{x \to +\infty} A(x) = +\infty$:
   Pour $x \geq 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A(x) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

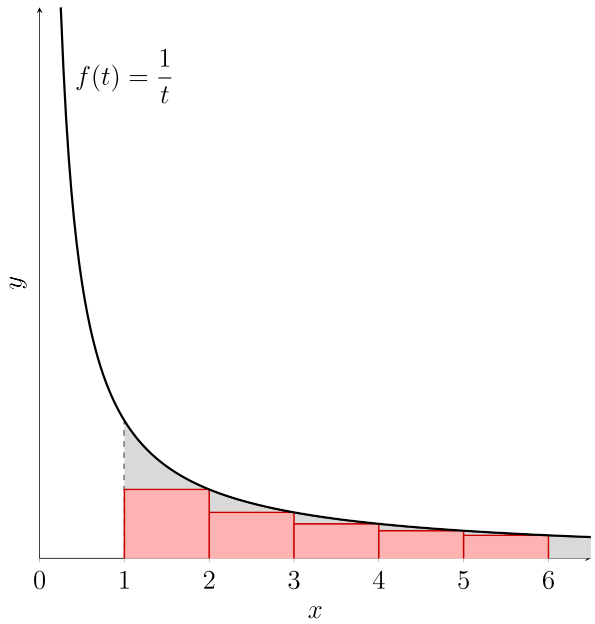

FIGURE 4 – Fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ et somme de Darboux inférieure.

Donc

Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} A(x) \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} = +\infty$.

Montrons maintenant que $\lim_{x\to 0^+} A(x) = -\infty$:

$$\lim_{x\to 0^+} A(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(-A\left(x^{-1}\right)\right) = \lim_{z\to+\infty} \left(-A\left(z\right)\right) = -\infty,$$

où on a posé $z = \frac{1}{x}$.
Puisque A est continue, le Théorème de la valeur intermédiaire nous permet de conclure que pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $A(x) = y$.

9. Puisque $A : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est injective et surjective, elle est bijective et admet donc une fonction réciproque $A^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

$\square$

La fonction A a donc toutes les propriétés d'un logarithme ! On peut en effet montrer que $A(x) = \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, où ln est le logarithme népérien, que vous avez dû définir comme l'inverse de l'exponentielle.
L'idée de la preuve est la suivante :
En utilisant la formule pour la dérivée d'une fonction réciproque, on remarque que A^{-1} satisfait

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}A^{-1}(x) = A^{-1}(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ A^{-1}(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

On peut montrer que la seule fonction qui satisfait (1) est l'exponentielle ; on a donc que $A^{-1}(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $A(x) = \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$!

3 Corps de révolution

Le but de cette section est de présenter une des applications du calcul intégral, à savoir le calcul d'aires et de volumes de corps de révolution. Cette section est tirée du cours d'intégration de N. Pointet.

Définition 3.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. La surface de révolution $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ obtenue en faisant tourner le graphe de f autour de l'axe Ox est définie par*

Le corps de révolution $K \subseteq \mathbb{R}^3$ obtenu en faisant tourner le graphe de f autour de l'axe Ox est défini par

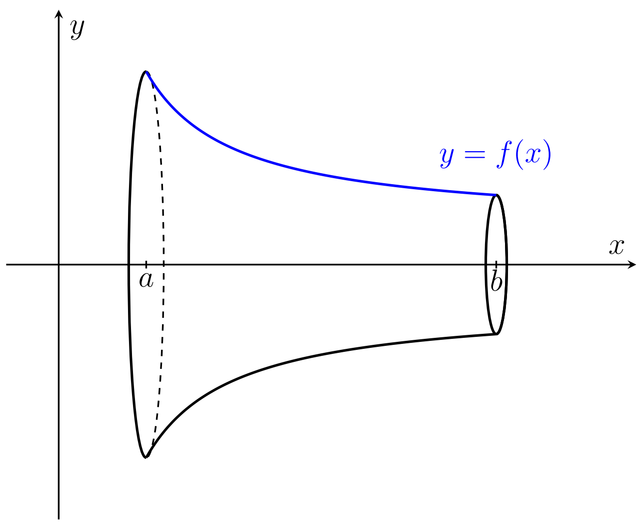

FIGURE 5 – Exemple d'un corps de révolution.

Exemple 3.1 (Paradoxe du télescope)**.** *On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e}{[x+1]}$, où $[x+1]$ dénote la partie entière de $x+1$. Soit K le* *corps de révolution obtenu en faisant tourner le graphe de f autour de l'axe Ox.*

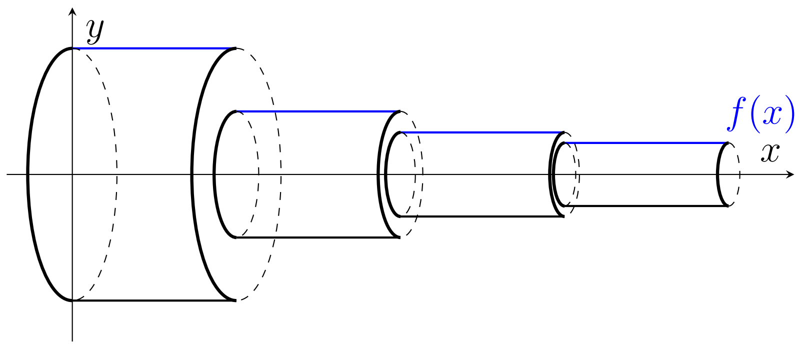

FIGURE 6 – Télescope.

Commençons par calculer le volume de K. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le volume V_n du cylindre $\{(x, y, z) \in K \mid n \leq x \leq n+1\}$ est donné par

Le volume total V est donc

Intéressons-nous maintenant à l'aire de la surface de K.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'aire latérale A_n du cylindre $\{(x, y, z) \in K \mid n \leq x \leq n+1\}$ est donnée par

L'aire totale A de la surface de K est donc donnée par

Le corps de révolution K a un volume fini, mais l'aire de sa surface est infinie !