

# Série 9

Pour le 5 novembre 2025

## Exercice 1

Calcule les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{x - \sin x}$  ;

b)  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$  ;

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$  ;

d)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16}$  ;

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$  ;

**Indication.** Tu peux appliquer la règle de Bernoulli-L'Hospital plusieurs fois.

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$ .

## Exercice 2

Effectue l'étude des fonctions réelles suivantes :

a)  $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$  ;

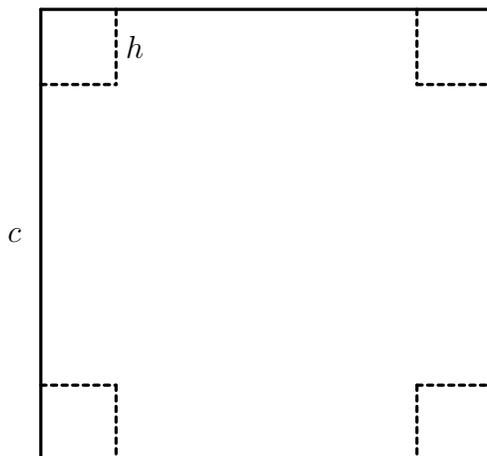
b)  $f(x) = \frac{x^2 - x + 5}{x}$  ;

c)  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  ;

d)  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$ .

**Exercice 3**

On fabrique une boîte sans couvercle avec une plaque de carton carrée de côté  $c$  (en découpant dans chaque coin un carré de côté  $h$ , la hauteur de la boîte, puis en repliant les côtés). Comment obtenir une boîte de volume maximal ?



**Indication.** Ecris une fonction  $f(h)$  qui donne le volume de la boîte en fonction de  $h$ . Détermine son domaine de définition et trouve son maximum !

**Exercice 4**

Trouve les points de la courbe  $y = x^2 - 9$  dont la distance à l'origine est minimale. Quelle est cette distance ?

**Indication.** Ecris une fonction  $f(x)$  qui donne la distance à l'origine.

**Exercice 5**

**Vrai ou faux ?** Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

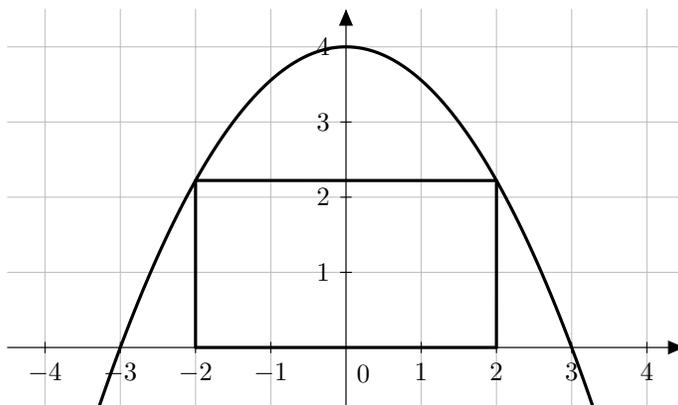
- La fonction  $\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$  est constante.
- La fonction  $\frac{\sin x}{x}$  tend vers zéro lorsque  $x$  tend vers l'infini.
- La fonction  $\frac{\cos x - 1}{x}$  tend vers zéro lorsque  $x$  tend vers zéro.
- Les seules fonctions convexes et concaves sont les fonctions constantes.

**Exercices théoriques****Exercice 6**

Soient  $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions convexes. Montre que  $f + g$  est encore convexe. Qu'en est-il de  $f \cdot g$  ?

**Exercice 7**

On considère une parabole de sommet  $(0; 4)$  et passant par le point  $(3; 0)$ . Détermine l'équation de cette parabole. On inscrit ensuite un rectangle posé sur l'axe horizontal comme ci-dessous :



Détermine les dimensions du rectangle d'aire maximale.