

Série 8

Pour le 29 octobre 2025

Exercice 1

Calcule les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (2x^2 + 3x - 5)^3$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 4}$

c) $h(x) = \left(\frac{x-1}{3x+2} \right)^2$

d) $l(x) = \frac{(2x-1)^3}{(5x+1)^4}$

e) $m(x) = 3\sqrt{2 \sin x \cos x}$

f) $u(x) = (1-x)(x-3)^4$

g) $v(x) = (x+x^2)^{-5}$

h) $w(x) = \frac{(3x+1)^2}{(x+2)^3}$

Exercice 2

On considère la fonction $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$.

a) Détermine son domaine de définition.

b) Montre que l'on peut prolonger f par continuité sur tout $\mathbb{R}$.

c) Calcule la dérivée $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

d) Calcule $f'(0)$.

e) Montre que la dérivée n'est pas continue en zéro.

Exercice 3

On considère la fonction $f : [-1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$. Trouve les extrema locaux de cette fonction. Commence par trouver tous les candidats possibles, puis essaie de tracer une esquisse du graphe de f .

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre. On considère la famille de paraboles d'équation $ax^2 + 5x - 7$. Montre qu'elles sont *toutes* tangentes entre elles. En quel point ?

Exercice 5

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- a) Une fonction dont la dérivée est négative est décroissante.
- b) Si une fonction admet un point où la dérivée n'existe pas, alors ce point est un extremum local.
- c) Les seules fonctions f dont la dérivée est $x + 1$ sont de la forme $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + c$, où c est une constante.
- d) Les seules fonctions f dont la dérivée est $\sin x$ sont de la forme $f(x) = \cos x + c$, où c est une constante.
- e) Si une fonction dérivable est croissante pour $x < 0$ et décroissante pour $x > 0$, alors $f'(0) = 0$.

Exercice 6

Calcule les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{\tan x}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x^2 + 3x}$;
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 - x}$;

Indication. Pose $h = \frac{1}{x}$ et transforme la limite ci-dessus en une limite lorsque h tend vers zéro.

Exercice 7

- a) Montre que la fonction $g(x) = x - \tan x$ est strictement décroissante entre 0 et $\pi/2$.
- b) Montre que la fonction $\frac{\sin x}{x}$ est strictement décroissante entre 0 et $\pi/2$.
- c) Dédus de la partie précédente que si $0 < a < b < \pi/2$, alors $\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b}$.
- d) Dédus aussi que si $0 < a < b < \pi/2$, alors $\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{\pi a}{2b}$.

Indication. Montre que $\frac{b}{\sin b} < \frac{\pi}{2}$ et utilise le fait que $0 < \sin a < a$.

Exercices théoriques**Exercice 8**

Le Théorème des accroissements finis. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continue définie sur un intervalle fermé et dérivable en tout point de $]a, b[$. Montre qu'il existe alors un point $a < c < b$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Indication. Pose $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ et montre que $g(x)$ satisfait à toutes les hypothèses nécessaires pour pouvoir appliquer le Théorème de Rolle.

Exercice 9

Démontre que tout polynôme $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de degré n admet au plus n racines réelles.

Indication. Utilise le théorème de Rolle pour montrer d'abord que si une fonction réelle f s'annule $k + 1$ fois, alors la dérivée f' s'annule au moins k fois, puis fais un raisonnement par l'absurde.

Exercice 10

Soit n un entier naturel *pair* et $a, b \in \mathbb{R}$. Montre que la fonction $f(x) = x^n + ax + b$ s'annule au plus en deux points (étudie la dérivée et applique le Théorème de Rolle!).