Série 6

Pour le 1er octobre 2025

Exercice 1

À l'aide de la définition de continuité avec ε et δ, montre que la fonction identité $f(x) = x$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

Indication : Ici, on peut utiliser $\delta = \varepsilon$.

Exercice 2

a) Montre que $-2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = \cos(x) - \cos(y)$ en calculant $\cos(u+v) - \cos(u-v)$ à l'aide des formules de la somme et différence des angles, puis en posant $u = (x+y)/2$, $v = (x-y)/2$.

b) À l'aide de la définition de continuité avec ε et δ, montre que la fonction $f(x) = \cos(x)$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$ (on peut utiliser $\delta = \varepsilon$).

Exercice 3

Vrai ou faux ? Justifie tes réponses !

a) La fonction $f(x) = 1/x$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

b) La fonction $f(x) = 1/x$ est continue.

c) Une fonction rationnelle est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

d) Une fonction rationnelle est continue.

e) La fonction $f(x) = |x|$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

Prolongement par continuité. Détermine le domaine de définition des fonctions suivantes puis le prolongement par continuité lorsque c'est possible.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ au point d'abscisse 1 ;

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ au point d'abscisse -1 ;

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ au point d'abscisse 0 ;

Exercice 5

Détermine le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes puis, s'il existe, le prolongement par continuité. Calcules également les asymptotes.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \cos(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \sin(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 2 \\ \exp_{10}(x) & \text{si } 2 < x < 3 \\ \dfrac{3000(x-4)}{x-6} & \text{si } x \geq 3 \text{ et } x \neq 6. \end{cases}$

d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}.$

Exercice 6

Cet exercice montre que la notion de continuité *en un point* ne correspond pas tout-à-fait à l'idée de pouvoir dessiner le graphe de la fonction sans lever le crayon. Le problème vient du fait que la fonction que nous allons étudier n'est continue qu'en un seul point.

On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montre que f est continue en zéro, mais qu'elle est discontinue en tout autre point $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

Détermine les deux nombres réels a et b pour que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(a^2-1)(b-2)+4x+x^3}{a^2(b+2)x+abx^2} = 1.$

Exercice 8

On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \lfloor 1/x \rfloor & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Calcule $f(x)$ lorsque $x \leq -1$ et conclus qu'elle est continue sur $]-\infty, -1[$.

b) Calcule $f(x)$ lorsque $x \geq 1$ et conclus qu'elle est continue sur $]1, \infty[$.

c) Calcule $f(x)$ lorsque $\dfrac{1}{n+1} \leq x \leq \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$.

d) Montre que la fonction est discontinue en $1/n$.

Exercice 9

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue.

a) Posons $g(x) = x - f(x)$. Calcule $g(a)$ et $g(b)$ et montre que la fonction g prend des valeurs positives (ou nulles) et négatives (ou nulles) sur l'intervalle $[a, b]$.

b) Applique le Théorème de la Valeur Intermédiaire pour conclure que la fonction g doit s'annuler au moins une fois sur $[a, b]$.

c) Déduis le résultat suivant.

> **Théorème du Point Fixe.** *Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Alors l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.*

Exercice 10

On considère une fonction polynomiale du troisième degré de la forme

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

a) Calcule les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers plus ou moins l'infini.

b) Montre que $f(x)$ prend des valeurs positives et négatives.

c) Conclus que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution. Combien de solutions cette équation peut-elle avoir en tout ?

d) Trouve un intervalle de longueur plus petit ou égal à $\frac{1}{8}$ dans lequel se trouve un zéro de la fonction $f(x) = x^3 + x - 1$.

Exercice 11

Vrai ou faux ? Justifie tes réponses !

a) Si f et g sont croissantes, alors $g \circ f$ est croissante.

b) Une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$ atteint toujours son supremum.

c) Une fonction bornée et qui atteint son maximum sur $[0, 1]$ est continue.

d) Si f et g ne sont pas continues, alors $f + g$ non plus.

e) La fonction $7 \cos^n(x^2 + 1) - 5 \sin(x - \pi)$ est continue.

Exercice 12

Utilise le Théorème de la Valeur Intermédiaire pour montrer que la fonction

$$f(x) = |\lfloor \tan(x^2) \rfloor| + 10$$

n'est pas continue.

Exercice 13

Une bijection non monotone. Construisons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 + x & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

a) Cette fonction est-elle continue ? Pourquoi ?

b) Montre que f est bijective.

c) Montre que f n'est ni croissante, ni décroissante.

Exercice 14

Un peu de tout. On définit la suite récurrente (x_n) en posant $x_0 = \sqrt{2}$ et $x_n = \sqrt{2x_{n-1}}$, $\forall n > 0$. On considère aussi les fonctions $f(x) = \dfrac{\cos(\pi x) - 1}{x - 2}$ et $g(x) = \dfrac{\cos(\pi x) - 2}{x - 2}$.

a) Montre que cette suite est strictement croissante (par exemple, en montrant que $x_n - x_{n-1} > 0$), et qu'elle converge. Quelle est alors sa limite ?

b) Calcule $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

c) Calcule $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$.

d) Peut-on prolonger f et g par continuité ?
Admettent-elles une asymptote verticale en $x = 2$, à droite ou à gauche ?

Bonus : Maximum et minimum.

Rappelons que le maximum de deux nombres a et b est le plus grand des deux nombres.

a) Soient a et b deux nombres réels. Vérifie que le maximum $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$.

b) Trouve une expression similaire pour le minimum.

c) Démontre que le maximum de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a. Tu pourras utiliser la première partie de cet exercice pour exprimer la fonction $\max\{f, g\}$ de façon à pouvoir appliquer des propriétés de continuité vues en cours.

d) Démontre que le minimum de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.