



Cours Euler

Module 5

Géométrie

I. Le produit vectoriel

Nous commençons ce module par quelques rappels de géométrie vectorielle. Nous établirons ensuite des formules de calcul de l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme dans le plan, puis dans l'espace. Nous verrons comment le calcul des aires et des volumes est lié à celui des déterminants. Nous travaillons dans un repère orthonormé, disons le repère canonique.

Rappel : Projection orthogonale d'un vecteur $\vec{a}$ sur un vecteur $\vec{b}$.

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$, deux vecteurs dans le plan vectoriel V_2 ou l'espace vectoriel V_3 .

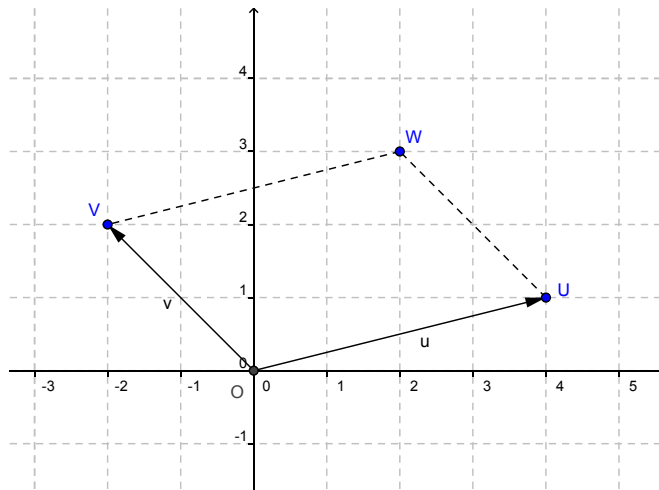
De la projection orthogonale découle l'expression trigonométrique du produit scalaire :

1 L'aire d'un triangle dans le plan

Considérons $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé.

Construisons des flèches $\overrightarrow{OU}$ et $\overrightarrow{OV}$ d'origine O qui représentent les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Plaçons encore le point W tel que $OUWV$ soit le parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Proposition 1.1. *L'aire du parallélogramme $OUWV$ est égale à la valeur absolue du déterminant*

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Démonstration. En choisissant pour base $[OU]$, l'aire du parallélogramme $OUWV$ vaut

$$\sigma(OUWV) =$$

Or, un vecteur perpendiculaire à $\vec{u}$ est $\vec{n} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$.

Ainsi, la hauteur du parallélogramme vaut

et son aire $\sigma(\vec{u}; \vec{v}) =$

□

Corollaire 1.2. *L'aire du parallélogramme $OUWV$ vaut $\sqrt{\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le fait que $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cos^2 \alpha$ et que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. $\square$

Puisque l'aire d'un triangle vaut la moitié de celle du parallélogramme correspondant, on obtient immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 1.3. *Si $\vec{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, l'aire du triangle ΔABC est donnée par*

$$\frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}; \vec{AC}) \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \right|$$

Exemple 1.4. Sur l'illustration précédente, l'aire du parallélogramme $OUWV$ vaut

ce que confirme un comptage manuel à l'aide de la grille.

2 Définition du produit vectoriel

Pour calculer le volume d'un parallélépipède dans l'espace nous introduisons un produit très particulier qui n'existe que dans $\mathbb{R}^3$.

Définition 2.1. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Le *produit vectoriel* $\vec{u} \wedge \vec{v}$, aussi noté $\vec{u} \times \vec{v}$, est le vecteur

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \quad .$$

Une autre façon de calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est d'utiliser une sorte de déterminant :

Exemple 2.2. Le produit vectoriel $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 =$

Remarque 2.3. Attention, le produit vectoriel n'est pas un produit dans le sens de ceux que nous avons vu pour les nombres réels. Par exemple si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$, alors en général $\vec{v} \neq \vec{w}$.

D'autre part ce produit est *anticommutatif* : changer l'ordre des vecteurs change le sens du produit vectoriel. Le produit vectoriel n'est pas non plus associatif. Il est par contre distributif dans le cadre de l'addition et de la multiplication externe donnée par la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 2.4. Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

- a) $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
- b) $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.
- c) $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
- d) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

Démonstration. Les propriétés b) et d) seront montrées en exercice.

Montrons la propriété c)

Montrons que la propriété a) découle des propriétés b) et c) :

□

Nous arrivons maintenant aux propriétés intéressantes du produit vectoriel, celles qui nous permettront de nous représenter géométriquement dans l'espace ce nouveau vecteur.

Proposition 2.5. *Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.*

Démonstration. Utilisons notre critère d'orthogonalité favori. Montrons que

□

3 La longueur du produit vectoriel

Nous connaissons déjà la direction du produit vectoriel de deux vecteurs. S'ils sont colinéaires, le produit vectoriel est nul, sinon il est orthogonal au plan formé par les deux vecteurs.

Il nous reste à comprendre quelle est sa longueur et quel est son sens.

Pour calculer la longueur nous avons besoin d'une égalité remarquable.

Lemme 3.1. *Soient a, b, c, d, e et f six nombres réels. Alors*

$$(bf - ec)^2 + (af - dc)^2 + (ae - bd)^2 + (ad + be + cf)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(d^2 + e^2 + f^2)$$

Démonstration. Il suffit de développer les deux côtés de l'égalité.

Dans le membre de gauche apparaissent produits de carrés ainsi que des doubles produits; ces derniers s'annulent tous deux à deux. Dans le membre de droite, seuls des produits de carrés apparaissent, qui sont exactement les mêmes que les produits de carrés du membre de gauche. □

L'interprétation vectorielle de cette identité est une relation entre les normes des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Proposition 3.2. Identité de Lagrange. *On a $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$.*

Démonstration. En posant $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$,

□

Nous sommes enfin prêts à montrer le grand résultat de la semaine !

Théorème 3.3. *Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ dont la longueur est l'aire du parallélogramme de côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En particulier, si α est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$,*

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\alpha)$$

Démonstration. L'identité de Lagrange nous apprend que

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| =$$

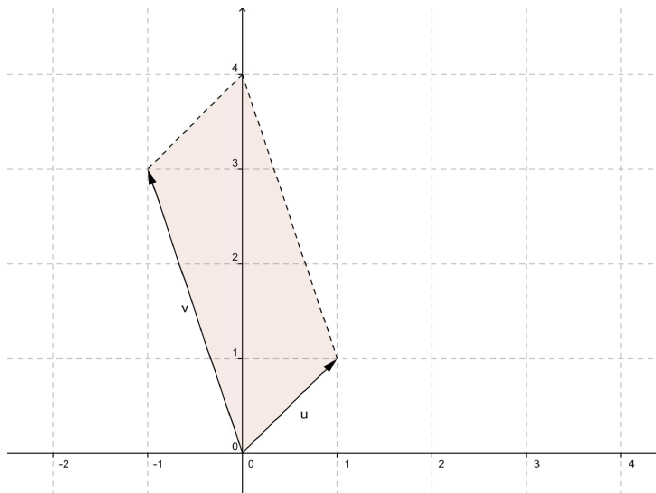
□

Exemple 3.4.

Considérons les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

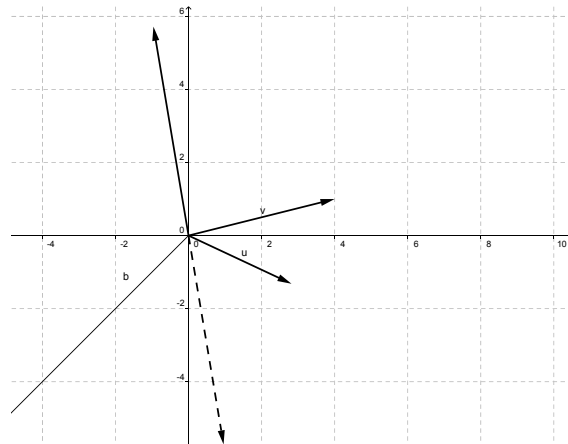
situés dans le plan Oxy .



Alors, $\vec{u} \wedge \vec{v} =$

4 Le sens du produit vectoriel

Il nous reste à déterminer le sens du produit vectoriel. Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires dans l'espace, nous savons maintenant que leur produit vectoriel est un vecteur orthogonal à ces deux vecteurs et que sa longueur est l'aire du parallélogramme qu'ils forment. Il ne reste plus que deux possibilités :



Pour déterminer le sens du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$, nous utilisons la ‘règle du tire-bouchon’ ou ‘règle de la main droite’.



Plus formellement ceci nous amène à la notion suivante.

Définition 4.1. Soit $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique et $\mathcal{B} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ une autre base.

Exprimons les vecteurs de cette nouvelle base comme combinaisons linéaires des vecteurs de la base canonique :

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \end{pmatrix}.$$

Alors la base $\mathcal{B}$ est *directe* si le déterminant $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$ est positif.

Exemple 4.2.

La base $(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)$ est car

Par contre, la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2)$ est indirecte.

Voilà enfin la réponse à notre question sur le sens du produit vectoriel.

Proposition 4.3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$.

Alors les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ forment une base directe.

Démonstration. Il suffit de calculer un déterminant avec les mêmes notations que précédemment :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & d & bf - ce \\ b & e & cd - af \\ c & f & ae - bd \end{vmatrix} =$$

□

Nous terminons par répondre à la question du calcul des volumes dans l'espace, que vous aurez le plaisir de démontrer dans la série d'exercices.

Théorème 4.4. Soit trois points $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ et $C = (c_1, c_2, c_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Le volume du parallélépipède de côtés $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$ est donné par la valeur absolue du déterminant correspondant :

$$|\det(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right|.$$

II. Métrique dans l'espace.

Les particularités du produit vectoriel vu la semaine dernière permettent de l'utiliser dans de nombreux contextes. Nous commencerons par reparler d'équation cartésienne de plan, puis étudierons les méthodes métriques pour calculer des distances, des surfaces, des angles et des volumes dans l'espace. Nous terminerons avec la sphère dans l'espace.

1 Le plan dans l'espace

En exploitant les propriétés du produit scalaire, vous avez vu que l'équation cartésienne d'un

plan perpendiculaire au vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ est de la forme

Nous cherchons maintenant à décrire le plan donné par deux *vecteurs directeurs*

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

passant par un point $A = (a_1; a_2; a_3)$. Nous pouvons calculer le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pour obtenir un vecteur normal au plan, puis utiliser le fait que le point A appartient au plan.

Nous pouvons aussi obtenir directement l'équation cartésienne du plan avec un déterminant :

Proposition 1.1. *L'équation cartésienne du plan α de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et passant par le point $A = (a_1; a_2; a_3)$ est donnée par*

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & u_1 & v_1 \\ y - a_2 & u_2 & v_2 \\ z - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Démonstration. $P = (x; y; z) \in \alpha \Leftrightarrow$

□

Exemple 1.2. Déterminons l'équation du plan défini par les points $A = (1; -1; 2)$, $B = (2; 3; 4)$ et $C = (-2; 3; 0)$.

Dans le plan, le lieu géométrique des points équidistants des deux extrémités d'un segment $[AB]$ s'appelle la *médiatrice*. Dans l'espace, ce même lieu géométrique est un plan.

Définition 1.3. Soient A et B deux points distincts de l'espace.

Le *plan médiateur* du segment $[AB]$ est le lieu géométrique des points équidistants de A et B .

Si $A = (a_1; a_2; a_3)$ et $B = (b_1; b_2; b_3)$, quelle est l'équation de ce plan médiateur ?

On peut l'interpréter comme $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, c'est-à-dire, les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

Voyons encore comment on peut calculer l'intersection de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ donnés chacun par leur équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et respectivement $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

Le vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et le vecteur normal à $\mathcal{P}'$ est $\vec{n}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

Ainsi un vecteur directeur de la droite d'intersection est donné par

$$\vec{v} =$$

Il ne reste plus qu'à trouver un point P commun aux deux plans et écrire l'équation paramétrique de la droite d'intersection :

Définition 1.4.

L'angle entre deux droites est le plus petit angle formé par deux vecteurs directeurs.

L'angle entre deux plans est le plus petit angle formé par deux vecteurs normaux non nuls.

Nous savons calculer l'angle α entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puisque $\vec{u} \bullet \vec{v} =$

Mais $\alpha = \arccos \left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right)$ donne un angle obtus si $\vec{u} \bullet \vec{v}$ est négatif. Nous calculerons donc

$$\alpha = \arccos \left(\frac{|\vec{u} \bullet \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right)$$

qui donnera toujours l'angle α aigu entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, des vecteurs directeurs quelconques non nuls.

En effet, si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$,

Exemple 1.5. Calculons l'angle entre les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Avec des vecteurs non nuls de l'espace, on peut aussi utiliser un produit vectoriel et la formule

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\alpha) \quad \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = \arcsin \left(\frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right)$$

2 Distances dans l'espace

Nous voulons maintenant établir des formules pour calculer la distance entre deux objets dans l'espace : entre un point et un plan, entre un point et une droite, ou entre deux droites.

Pour commencer nous donnons la formule analogue à celle qui permet de calculer la distance entre un point et une droite du plan. Il s'agit alors de la distance entre un point et sa projection orthogonale sur un plan.

Proposition 2.1. Soit $P = (p_1; p_2; p_3)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et $ax + by + cz + d = 0$ un plan α . Alors la distance entre P et α est donnée par les équations

$$\delta(P; \alpha) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Démonstration. Soit $A = (a_1; a_2; a_3) \in \alpha$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à α .

Alors $\delta(P; \alpha)$ est égale à la norme de la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AP}$ sur $\vec{n}$:

Utilisons le fait que $\overrightarrow{AP} =$ et prenons $\vec{n} =$

□

Définition 2.2. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux plans sécants dans l'espace.

Les *plans bissecteurs* de ces deux plans sont définis comme le lieu géométrique des points de l'espace situé à égale distance des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Notons que, comme il y a dans le plan deux bissectrices pour une paire de droites concourantes, il y a deux plans bissecteurs pour une paire de plans sécants dans l'espace.

Si $\mathcal{P}$ est donné par $ax + by + cz + d = 0$ et $\mathcal{Q}$ est donné par $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, alors les plans bissecteurs sont donnés par

En effet, la valeur absolue des expressions se trouvant de part et d'autre de l'égalité est la distance d'un point $(x; y; z)$ aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Passons maintenant à la formule de calcul de la distance d'un point à une droite de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 2.3. *La distance du point P à la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est*

$$\delta(P; d) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Démonstration. $\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{u}\|$ correspond à

□

Voici enfin la formule donnant la distance entre deux droites, c'est-à-dire la distance la plus courte entre deux points de chacune des droites.

Proposition 2.4. *Soit d une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et e une droite non parallèle passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$. La distance entre ces deux droites est*

$$\delta(d; e) = \frac{|\overrightarrow{AB} \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

Démonstration. Soit d' la parallèle à d passant par B et e' la parallèle à e passant par A .

Le parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ a pour volume

Il a pour faces parallèles les plans α et β dont la distance vaut

$$\delta(\alpha, \beta) =$$

Reste à montrer qu'il existe deux points $A' \in d$ et $B' \in e$ tels que $\|\overrightarrow{A'B'}\| = \delta(\alpha, \beta)$

Considérons la droite p , perpendiculaire aux plans α et β et passant par A .

Elle coupe β en un point C .

□

3 La sphère dans l'espace

Nous terminons avec une brève étude de la sphère. Par définition la sphère de rayon r et de centre $C = (a; b; c)$ est le lieu géométrique des points $P = (x; y; z)$ tels que $\|\overrightarrow{CP}\| = r$.

Par conséquent l'équation cartésienne de cette sphère est donnée par

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Exemple 3.1. Montrons que l'équation $x^2 + 4x + y^2 - 8y + z^2 = 5$ et l'équation d'une sphère en déterminant le centre et le rayon de cette dernière.

De manière absolument semblable au cas de la tangente à un cercle, on trouve l'équation du plan tangent à une sphère.

Proposition 3.2. Soit $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ l'équation d'une sphère Σ dans $\mathbb{R}^3$ et $T = (s; t; u)$ un point de la sphère. Alors le plan tangent à la sphère passant par T est donné par l'équation

$$\tau : (x - a)(s - a) + (y - b)(t - b) + (z - c)(u - c) = r^2$$

Démonstration. On voit immédiatement que $T \in \tau$ puisque $T \in \Sigma$.

De plus, un vecteur normal à τ est

qui est le rayon de Σ passant par T .

□

Pour obtenir un modèle vectoriel et paramétrique de la sphère, il faut se souvenir qu'un point de la sphère unité est déterminé par deux angles : celui que fait sa projection sur le plan horizontal avec l'axe Ox et celui qu'il fait avec l'axe vertical Oz .

Notons le premier $\theta \in [0; 2\pi[$ et le second $\phi \in [0; \pi]$

Alors, si P est un point de la sphère unité, $\overrightarrow{OP} =$

Par conséquent, une sphère de centre C et de rayon r a pour équation vectorielle paramétrique

Profitons de définir l'angle entre deux sphères ! Soit Σ et Σ' deux sphères dans l'espace, centrées respectivement en C et C' , et P un point commun. Alors l'angle que font les sphères en ce point P est l'angle que font les plans tangents en P . Puisque le vecteur $\overrightarrow{CP}$ est normal au plan tangent à Σ en P , cet angle α est simplement donné par l'angle entre les rayons $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{C'P}$.

On le calcule par exemple grâce au produit scalaire, puisque

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{C'P} = \|\overrightarrow{CP}\| \cdot \|\overrightarrow{C'P}\| \cos \alpha = rr' \cos \alpha.$$

Remarque 3.3. En général deux sphères sécantes se coupent en

Pourquoi l'angle entre les sphères est-il le même en chacun des points d'intersection ?

Exemple 3.4. Calculons l'angle entre les sphères Σ et Σ' données par les équations

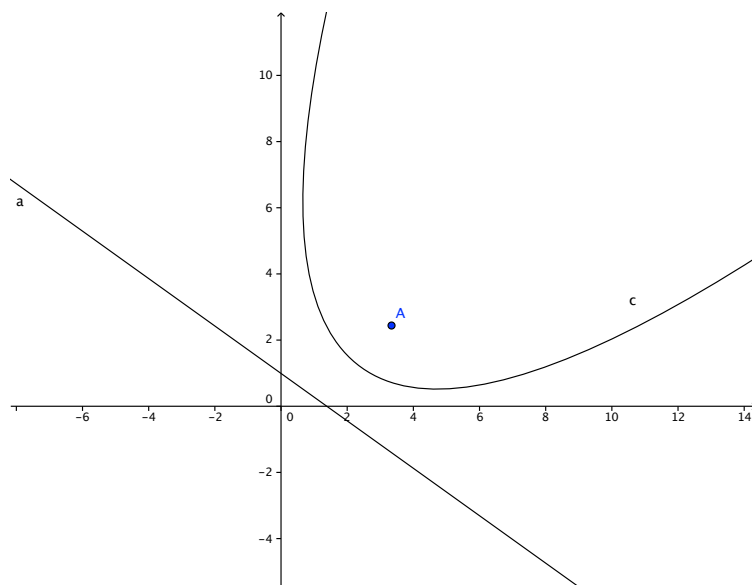
$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{et} \quad \Sigma' : x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

III. Les coniques

1 Rappel sur la parabole

Vous avez défini la parabole de foyer F et de droite directrice d , comme le *lieu géométrique* des points P du plan équidistants de F et de d (on suppose que F n'appartient pas à la directrice). Vous avez vu ensuite que le graphe de toute fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, est une parabole. Pour cela, vous avez translaté le graphe horizontalement pour que son axe de symétrie soit l'axe vertical $x = 0$, puis verticalement pour que son sommet soit le point $(0; 0)$. La fonction est alors de la forme $f(x) = x^2/2p$, dont le graphe est une parabole de foyer $F(0; p/2)$ et de directrice $y = -p/2$.

Regardons maintenant le cas général d'une parabole donnée par son foyer $F(u; v)$ et sa directrice d'équation $bx + ay + k = 0$.



Pour trouver l'équation générale de la parabole, nous posons simplement l'équation qui traduit l'égalité $\delta(P; F) = \delta(P; d)$ que nous élevons au carré pour ne pas trainer des racines carrées.

Soit $P(x; y)$ un point de la parabole. Alors

Nous avons donc montré que l'équation générale d'une parabole est une équation quadratique en x et y , d'où le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Une parabole dans $\mathbb{R}^2$ est donnée par une équation cartésienne sous la forme*

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 + cx + dy + e = 0,$$

avec a, b, c, d et e des nombres réels. □

Exemple 1.2. Que détermine l'équation $x^2 - 2xy + y^2 = h^2$?

Pour terminer avec la parabole, regardons encore son équation *paramétrique*, c'est-à-dire une équation qui ne dépend que d'un paramètre souvent noté t . Le fait qu'il n'y ait qu'un paramètre indique que la parabole est un objet unidimensionnel et la lettre t rappelle le fait que cette équation pourrait représenter celle de la trajectoire d'un objet au cours du temps.

Soit $F(u; v)$ le foyer et d la directrice. Appelons S le point milieu du segment reliant F à sa projection orthogonale sur d . S est le sommet de la parabole. Choisissons un repère orthonormé en S composé de deux vecteurs $\vec{e}$ et $\vec{f}$, où $\vec{f} = \frac{2}{p}\vec{SF}$ est obtenu en normalisant $\vec{SF}$.

Nous avons tout fait pour nous ramener à l'équation quadratique $y = \frac{1}{2p}x^2$ et pouvons écrire :

Proposition 1.3. *Une parabole dans $\mathbb{R}^2$ est donnée par une équation paramétrique de la forme suivante, où $(\vec{e}, \vec{f})$ est une base orthonormée, S un point du plan et $p \in \mathbb{R}$:*

$$\vec{SP}(t) = 2pt\vec{e} + 2pt^2\vec{f}.$$

2 L'hyperbole

Comme pour la parabole, on se fixe un point F appelé le foyer et une droite d appelée la directrice.

Définition 2.1. Soit $e > 1$. L'*hyperbole* de foyer F et de directrice d est le lieu géométrique des points P du plan tels que $\delta(P, F) = e \delta(P, d)$. On appelle e l'*excentricité* de l'hyperbole.

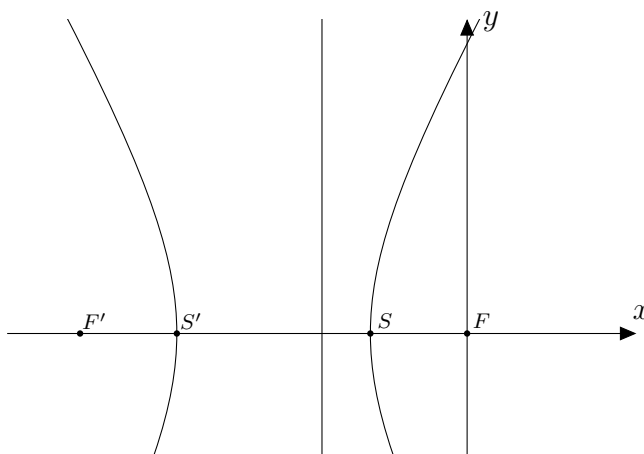
Pour nous ramener à l'étude analytique de l'hyperbole, nous allons effectuer un changement de repère de sorte à translater le foyer à l'origine et effectuer une rotation pour que la directrice soit verticale d'équation $x = k$.

Pour $P(x; y)$, l'égalité $\delta(P, F) = e \delta(P, d)$ élevée au carré devient

$$x^2 + y^2 = e^2(x - k)^2 = e^2x^2 - 2e^2kx + e^2k^2.$$

Remarquons qu'il y a deux points S et S' sur la droite passant par F et orthogonale à d qui appartiennent à l'hyperbole. On appelle S et S' les sommets de l'hyperbole. Ils correspondent aux rapports de section $(FD, S) = -e$ et $(FD, S') = e$.

Nous utiliserons plus tard que $\delta(S', d) = \delta(S, d) \frac{e+1}{e-1}$.



On obtient les abscisses des sommets en posant $y = 0$ dans l'équation $x^2 + y^2 = e^2(x - k)^2$:

Le milieu de S et S' se trouve donc en

Pour obtenir plus de symétrie, nous effectuons une translation horizontale pour amener l'origine en ce point milieu. Nous remplaçons donc x par $X = x - \frac{e^2 k}{e^2 - 1}$ et y reste inchangé $Y = y$.

L'équation devient maintenant

Proposition 2.2. *La médiatrice du segment $[SS']$ est un axe de symétrie de l'hyperbole et le milieu de $[SS']$ est un centre de symétrie.*

Démonstration. Si le point $P(x, y)$ vérifie l'équation ci-dessus, alors $P'(-x, y)$ et $P''(-x, -y)$ aussi. □

Le comportement asymptotique est une autre conséquence de l'équation précédente.

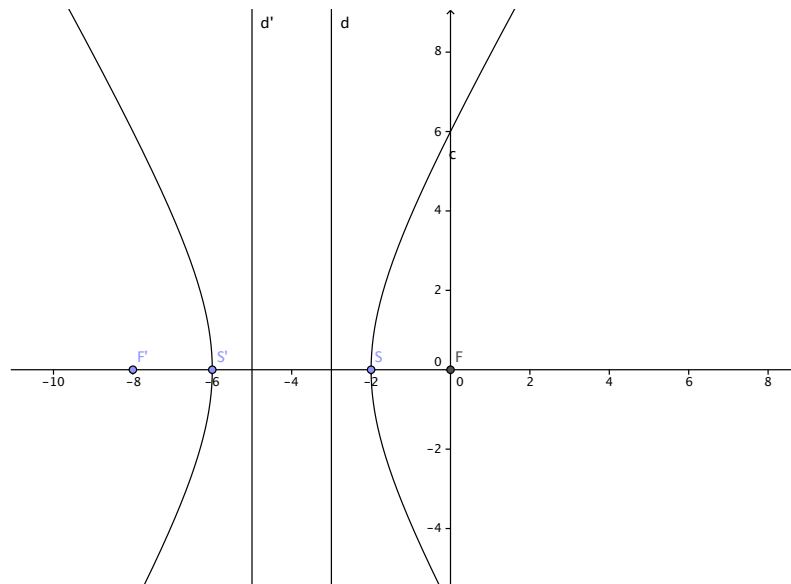
Proposition 2.3. *Les droites d'équation $y = \pm \sqrt{e^2 - 1} x$ sont les asymptotes obliques des courbes d'équation $y^2 = (e^2 - 1)x^2 + \frac{e^2 k^2}{1 - e^2}$.*

Démonstration. Lorsque x tend vers l'infini, le rapport $\left| \frac{y}{x} \right|$ tend vers $\sqrt{e^2 - 1}$. □

L'axe de symétrie apparemment anodin découvert ci-dessus nous permet de trouver une autre caractérisation, appelée *bifocale* :

Proposition 2.4. *Soient F et F' deux points distincts et $a > 0$. L'hyperbole de foyer F et dont la distance entre les sommets S et S' vaut $2a$ est le lieu géométrique des points P du plan qui vérifient $|\delta(P, F) - \delta(P, F')| = 2a$.*

Démonstration. Avec les mêmes notations que sur l'illustration précédente (page 3), considérons un point arbitraire P de l'hyperbole. Supposons qu'il se trouve du même côté de d que F (sinon on change les rôles de F et F'). On a donc $\delta(P, F) = e \delta(P, d)$.



□

La forme canonique de l'équation d'une hyperbole dont les foyers se trouvent sur une droite horizontale est la suivante :

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1.$$

Le point $(u; v)$ est le point milieu des deux foyers.

En translatant ce point en l'origine, on obtient l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

L'excentricité e de l'hyperbole doit satisfaire $e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$, ou encore $e = \sqrt{b^2/a^2 + 1} = \cosh(\operatorname{arcsinh}(b/a))$.

La demi-distance entre les deux sommets est a .

Une grandeur importante est $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, la demi-distance entre les foyers et ainsi, $e = \frac{c}{a}$.

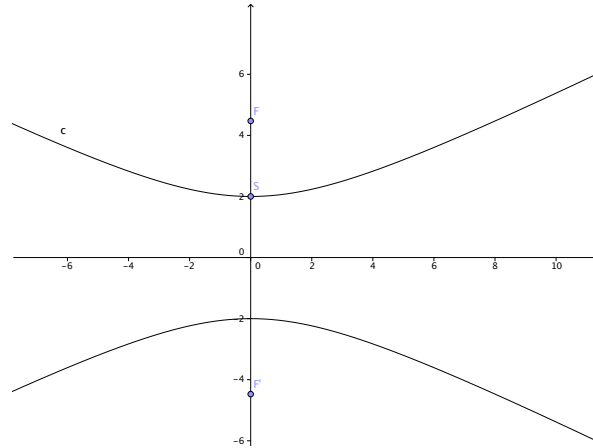
Et pour trouver les directrices, il faut refaire une translation pour mettre le foyer à l'origine !

Quant à l'équation paramétrique, nous en avons vue une en définissant les fonctions de trigonométrie hyperbolique. L'hyperbole dont nous avons écrit l'équation analytique canonique est parcourue par la courbe d'équation

$$f(t) = (\pm a \cosh t + u, b \sinh t + v).$$

Exemple 2.5. Déterminons les caractéristiques de l'hyperbole dont l'équation est $4y^2 - x^2 = 16$. Nous commençons par écrire l'équation sous forme canonique

$$\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$$



3 L'ellipse

L'étude de l'ellipse est en tous points similaire à celle de l'hyperbole. Elle correspond au cas où l'excentricité est comprise entre 0 et 1 (strictement).

Définition 3.1. Soit $0 < e < 1$. L'*ellipse* de foyer F et de directrice d est le lieu géométrique des points P du plan tels que $\delta(P, F) = e \delta(P, d)$. On appelle e l'*excentricité* de l'ellipse.

Vous verrez en exercice que l'ellipse admet aussi une description bifocale.

Proposition 3.2. Soient F et F' deux points distincts et $a > 0$. Une ellipse est le lieu géométrique des points P du plan qui vérifient $\delta(P, F) + \delta(P, F') = 2a$.

La forme canonique de l'équation d'une ellipse dont les foyers se trouvent sur une droite horizontale est la suivante :

$$\frac{(x - u)^2}{a^2} + \frac{(y - v)^2}{b^2} = 1,$$

avec $a > b$. Le « grand axe » est de longueur $2a$, le « petit axe » de longueur $2b$.

Proposition 3.3. *La distance entre le centre $(u; v)$ de l'ellipse et les foyers vaut $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.*

Démonstration. Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que le centre est situé en l'origine. L'équation $\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2$ nous permet de calculer l'excentricité car

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Utilisons l'expression bifocale $\delta(P, F) + \delta(P, F') = 2a$ et le point $P(0; b)$.

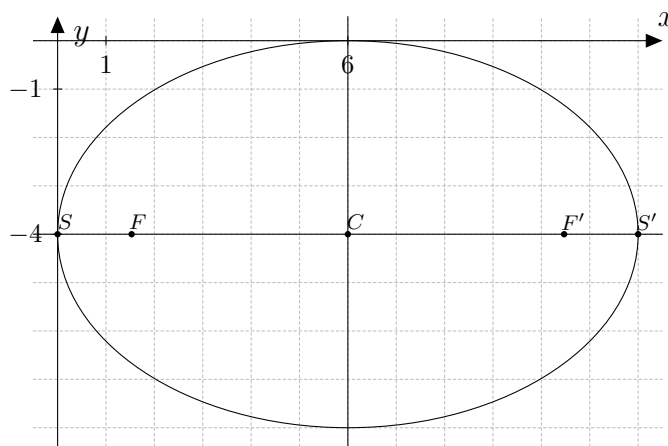
Puisque le centre est à l'origine, si $F(c; 0)$, alors $F'(-c; 0)$ et on obtient l'équation

$$2\sqrt{b^2 + c^2} = 2a,$$

si bien que $c^2 = a^2 - b^2$. □

Exemple 3.4. Quelle est la courbe d'équation $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$?

Il n'y a pas de termes en xy , ce qui indique que nous pouvons compléter les carrés pour nous ramener à l'équation sous forme canonique :



Résumé :

IV. Les sections coniques

La semaine passée, nous avons étudié les coniques par leur définition focale et/ou bifocale. Nous avons trouvé les expressions des équations du second degré qui les caractérisent.

Aujourd'hui, nous allons comprendre pourquoi ces courbes s'appellent coniques, puis apprendre des techniques qui permettent de trouver leurs caractéristiques à partir de leur équation.

1 Sections coniques

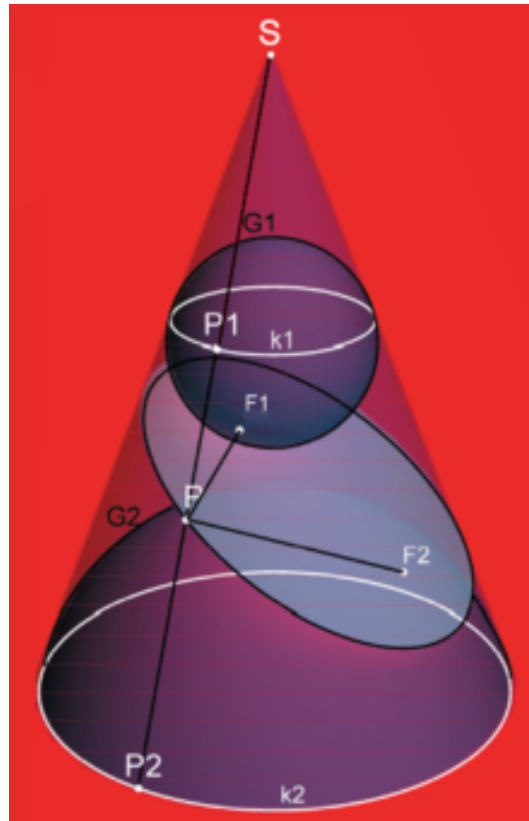
C'est probablement à Apollonius, né à Perga (en Turquie actuellement) vers -262 et décédé vers -190 , que l'on doit la première étude des coniques en tant que telles (sections planes d'un cône). C'est lui qui donna à l'ellipse, à la parabole et à l'hyperbole les noms que nous leur connaissons, même si ce n'est qu'à travers des écrits de Pappus (4ème siècle) que les géomètres de la Renaissance déduisirent les découvertes d'Apollonius. On lui attribue l'hypothèse des orbites excentriques pour expliquer le mouvement apparent des planètes et la variation de vitesse de la Lune !



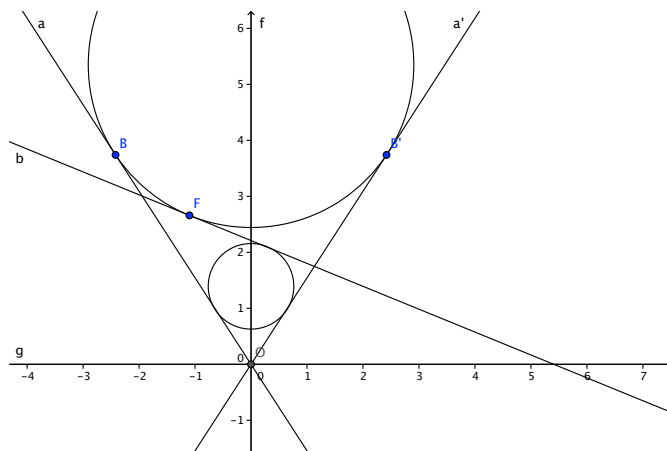
Par un *cône*, on entend ici un cône de révolution formé par la rotation d'une droite autour d'un axe qu'elle coupe en un point. Sans restreindre la généralité, on supposera que ce point est l'origine et que l'axe de rotation est l'axe Oz . En d'autres termes, nous étudierons les cônes donnés par

où $r > 0$ est un nombre fixé qui indique le rayon du cercle situé dans le plan $z = 1$.
Le paramètre h indique la hauteur et φ l'angle formé dans le plan horizontal.

Notre but est de comprendre comment un plan quelconque coupe un tel cône. Lorsque le plan est horizontal l'intersection est visiblement un cercle ou éventuellement un point, mais que se passe-t-il en général ? Nous suivrons la méthode du mathématicien belge Germinal Pierre Dandelin, né le 12 avril 1794 au Bourget, France, décédé le 15 février 1847 à Bruxelles.

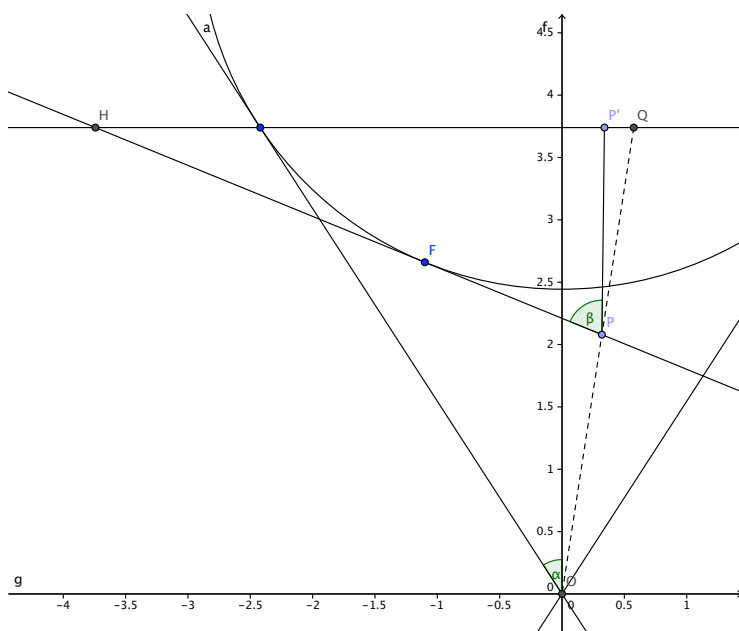


Coupe du plan Oyz du cône renversé "sur son sommet" et coupé par le plan π .



Théorème 1.1. *L'intersection d'un cône et d'un plan est soit une ellipse, soit une parabole, soit une hyperbole.*

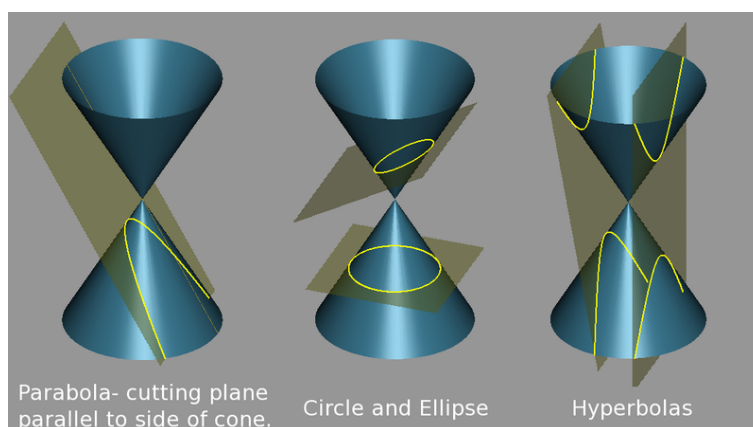
Démonstration. Considérons les points, droites et plans suivants :



□

Exemple 1.2. Lorsque l'angle β entre le plan p et la verticale vaut exactement α , alors $e = 1$ et la conique est une parabole.

Lorsque $\beta < \alpha$, on obtient une hyperbole car $e > 1$ et si $\beta > \alpha$, on a une ellipse.



2 L'équation générale d'une conique

Nous avons déduit de la définition d'une conique (par foyer et directrice) que l'équation générale d'une telle courbe est donnée par une équation du second degré de la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Comment reconnaître la conique décrite par une telle formule et comment trouver ses foyers ?

Nous allons faire un changement de variables pour éliminer le terme en xy . Autrement dit, puisque nous savons que cette équation décrit une conique, nous allons déterminer son axe de symétrie afin de remplacer le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ par un autre repère orthonormé $\mathcal{R}^* = (O, \vec{f}_1, \vec{f}_2)$ dans lequel l'équation se simplifie. Comme $\vec{f}_1$ est de longueur 1, il a la forme

Quelle est la relation entre les inconnues x, y de la base canonique $\mathcal{B}$ et les inconnues (u, v) de la nouvelle base $\mathcal{B}^*$? Les coordonnées (u, v) sont obtenues par un simple changement de base :

Remplaçons l'expression de $x = u \cos t - v \sin t$ et $y = u \sin t + v \cos t$ dans l'équation de la conique et voyons comment éliminer le double produit. Dans la pratique, il faudra tenir compte de tous les coefficients, mais ici, concentrons-nous sur la partie quadratique $ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Il vient $a(u \cos t - v \sin t)^2 + 2b(u \cos t - v \sin t)(u \sin t + v \cos t) + c(u \sin t + v \cos t)^2$.

La partie en uv vaut

$$\Leftrightarrow 2 \cos t (c \sin t + b \cos t) - 2 \sin t (a \cos t + b \sin t).$$

Maintenant arrive l'observation clé !

Proposition 2.1. Si $\vec{f}_1$ est un vecteur propre de norme 1 de la matrice A , le changement de variable $x = u \cos t - v \sin t$ et $y = u \sin t + v \cos t$ rend l'équation quadratique de la forme

$$a'u^2 + c'v^2 + 2d'u + 2e'v + f' = 0.$$

Remarque 2.2. En effectuant le changement de variable les valeurs des coefficients a' et c' sont les suivants :

$$a' = a \cos^2 t + 2b \cos t \sin t + c \sin^2 t \quad \text{et} \quad c' = a \sin^2 t - 2b \cos t \sin t + c \cos^2 t.$$

Exemple 2.3. On considère la conique d'équation $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 32y + 92 = 0$.

La matrice associée est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dont une valeur propre est visiblement

En fait, les nouveaux coefficients a' et c' sont les deux valeurs propres de la matrice A ! Pour continuer, il ne reste plus qu'à effectuer une translation afin d'éliminer les termes en u et v . Ceci se fait comme d'habitude en complétant les carrés.

Exemple 2.4. On considère la conique d'équation $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 32y + 92 = 0$.

Après le changement de variable $x = u \frac{\sqrt{2}}{2} + v \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = -u \frac{\sqrt{2}}{2} + v \frac{\sqrt{2}}{2}$, on arrive à

$$2u^2 + 4v^2 + 16\sqrt{2}u - 16\sqrt{2}v + 92 = 0.$$

Complétons les carrés :

Par conséquent, en effectuant le changement de variables $X = u + 4\sqrt{2}$ et $Y = v - 2\sqrt{2}$, on obtient

Comment déterminer quelle type de conique se cache derrière une équation générale ?

Définition 2.5. Le *discriminant* de la conique d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ est le nombre $\Delta = b^2 - ac$.

Théorème 2.6. La conique d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ est une ellipse si son discriminant $\Delta < 0$, une parabole si $\Delta = 0$ et une hyperbole si $\Delta > 0$.

Démonstration. Après avoir fait le changement de variable correspondant à une rotation, nous avons calculé les valeurs $a' = a \cos^2 t + 2b \cos t \sin t + c \sin^2 t$ et $c' = a \sin^2 t - 2b \cos t \sin t + c \cos^2 t$ de la nouvelle équation $a'u^2 + c'v^2 + d'u + e'v + f' = 0$. Que vaut le discriminant de cette équation ?

Observons que la matrice $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice A .

On l'obtient en effet en effectuant le changement de base correspondant à la rotation d'angle t :

$$A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = S^{-1}AS.$$

□

Exemple 2.7. On étudie la conique c d'équation $x^2 + 6xy + 9y^2 + \sqrt{19}x + \sqrt{10}y = 0$.

On calcule

Mais laquelle? Une valeur propre évidente de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ est

Vecteur propre associé :

On effectue donc le changement de variables $x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3u + v)$ et $y = \frac{1}{\sqrt{10}}(-u + 3v)$.

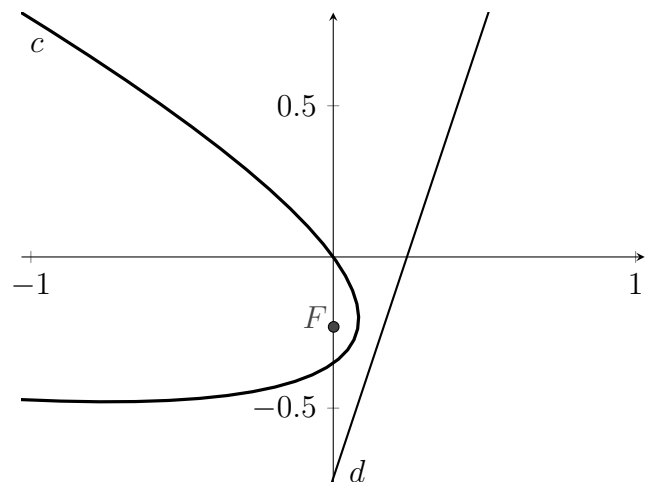
On calcule la nouvelle forme de l'équation en coordonnées $(u; v)$ par rapport à la nouvelle base obtenue après rotation et on obtient

$$10v^2 + 2u + 4v = 0 \quad \leftrightarrow \quad u = -5v^2 - 2v$$

Il s'agit d'une parabole concave d'axe Ou dans le repère donné par $(O; \vec{f}_1; \vec{f}_2)$.

Son sommet se trouve au point du graphe de cette fonction quadratique où la dérivée s'annule, donc lorsque $v = -\frac{1}{5}$ et on obtient $u = \frac{1}{5}$.

En faisant le changement de variables inverse, on obtient



V. Mouvements dans l'espace

Le sujet de ce jour nous ramène à la géométrie vectorielle avec la définition de mouvements dans l'espace puis de forme bilinéaire. Nous retrouverons le produit vectoriel que nous connaissons déjà et découvrirons une de ses propriétés remarquables.

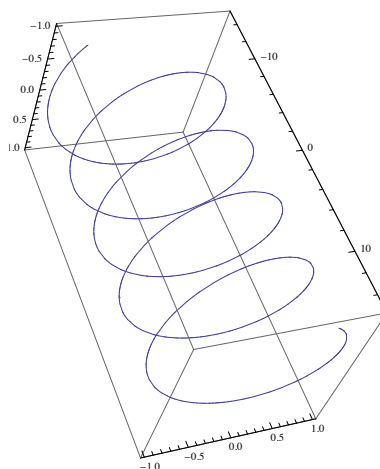
Nous terminerons le cours avec la notion de polaire, dont nous aurons besoin la semaine prochaine pour étudier un type de transformations du plan inhabituelles : les inversions.

1 Mouvements dans l'espace

Vous avez étudié les isométries du plan en détail, puis celles de l'espace. L'idée de l'étude des "mouvements" est que les isométries directes peuvent s'interpréter comme des déformations continues de l'espace. Par exemple, pour effectuer une translation horizontale de 30 centimètres, disons d'un crayon, nous pouvons le soulever et le déplacer continûment pour l'amener à la position désirée. Nous faisons cette étude de mouvement dans $\mathbb{R}^3$ à cause de nos motivations, mais pourrions tout aussi bien remplacer l'espace par $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \geq 1$.

Définition 1.1. Une fonction réelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est déterminée par ses trois coordonnées f_1, f_2, f_3 telles que $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Une telle fonction est *continue* si ses fonctions de coordonnées f_1, f_2 et f_3 sont des fonctions réelles continues.

Exemple 1.2. La fonction $f(t) = (\cos t; \sin t; t)$ est



Définition 1.3. Un *mouvement* est une famille d'isométries g_t de $\mathbb{R}^3$ telle que, pour $t \in [0, 1]$,

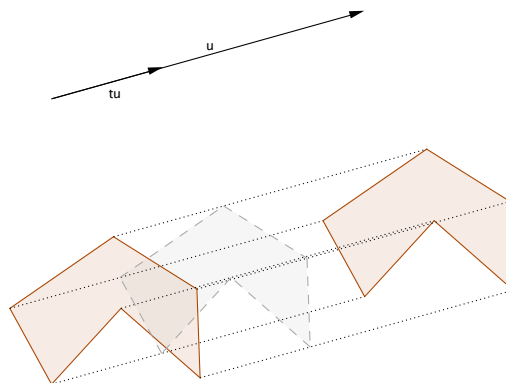
- a) g_0 est l'identité ;
- b) pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec $t \mapsto g_t(x)$ est continue.

Exemple 1.4. Translation continue. Soit $v = (v_1, v_2, v_3)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et posons

$$g_t(x) = x + tv, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Alors $g_0(x) =$

Et pour $x \in \mathbb{R}^3$ fixé,



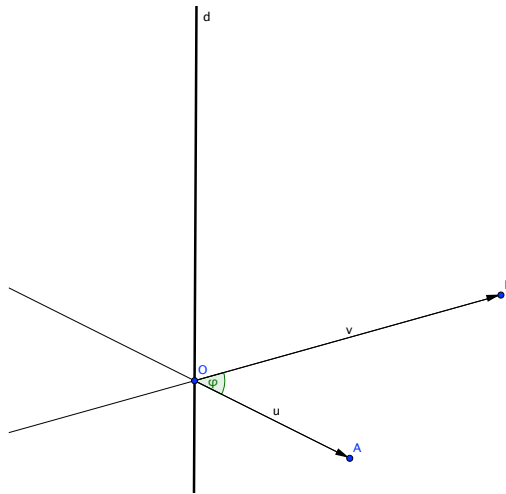
Concentrons-nous à présent sur les mouvements de l'espace décrits en termes vectoriels.

Exemple 1.5. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et de même norme de $V(\mathbb{R}^3)$ et soient les flèches $\overrightarrow{OU}$ et $\overrightarrow{OV}$ dans $\mathbb{R}^3$, d'origine O , qui représentent les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Nous aimerions construire un mouvement qui amène $\vec{u}$ sur $\vec{v}$. Comment faire ?

Soit $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$, un vecteur non nul perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ et soit φ l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Posons, pour tout $0 \leq t \leq 1$, $g_t(x) =$



Proposition 1.6.

Les isométries g_t qui constituent un mouvement sont directes, c'est-à-dire, préservent l'orientation.

Démonstration. Fixons un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et suivons les vecteurs de base pendant le mouvement g_t . Pour fixer les idées, supposons que le vecteur $\vec{e}_3$ se trouve dans le demi-espace supérieur délimité par le plan $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$, c'est-à-dire celui dans lequel on *visse* un tire-bouchon en amenant $\vec{e}_1$ sur $\vec{e}_2$. Le raisonnement est le même dans le cas contraire.

□

Exemple 1.7. Si $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{V}(\mathbb{R}^3)$ de même norme et $\vec{w} = \overrightarrow{OW}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, alors il existe un mouvement g_t tel que $g_1(\vec{u}) = \vec{v}$, $g_1(\vec{v}) = \vec{u}$ et par suite, $g_1(\vec{w}) = -\vec{w}$.

2 Forme bilinéaire

Définition 2.1. Soient U, V et W trois K -espaces vectoriels et $\alpha : U \times V \rightarrow W$ une application. On dit que α est *bilinéaire* si $\alpha(u, -) : V \rightarrow W$ et $\alpha(-, v) : U \rightarrow W$ sont linéaires pour tout $u \in U$ et tout $v \in V$.

Exemple 2.2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels.

Soit $\alpha : V(\mathbb{R}^2) \times V(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\alpha(X; Y) = X^T A Y$

Ainsi, $\alpha(X; Y) = X^T A Y =$

et $\alpha(X; rY + sZ) =$

De même, $\alpha(rX + sY; Z) =$

Cette application est bilinéaire. On dit que c'est une *forme bilinéaire* de $V(\mathbb{R}^2)$.

Exemple 2.3. Le produit vectoriel $\wedge : \mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{V}(\mathbb{R}^3)$ est une forme bilinéaire.

En effet, on a bien

Le théorème du jour affirme que la seule application bilinéaire de l'espace qui est invariante par tous les mouvements est le produit vectoriel.

Ce résultat est essentiel en physique pour aborder les mouvements des astres en cosmologie car le moment cinétique $\vec{L} = \vec{R} \wedge \vec{P}$ où $\vec{R}$ est le vecteur position et $\vec{P}$ la quantité de mouvement $m\vec{v}$.

Théorème 2.4. Soit $j : \mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{V}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{V}(\mathbb{R}^3)$ une application telle que

a) j est bilinéaire ;

b) $j(g_t(\vec{u}), g_t(\vec{v})) = g_t(j(\vec{u}, \vec{v}))$ pour tous les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et tout mouvement g_t .

Alors il existe un nombre réel λ tel que $j(\vec{u}, \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

Démonstration. Observons d'abord que par bilinéarité $j(\vec{u}, \vec{0}) = \vec{0}$ et $j(\vec{0}, \vec{v}) = \vec{0}$.

Nous supposons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls dès maintenant.

Commençons par montrer que $\vec{w} = j(\vec{u}, \vec{v})$ est toujours orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Considérons le mouvement g_t correspondant à la rotation d'angle π autour d'un axe perpendiculaire au plan $(\vec{u}, \vec{v})$ que vous décrirez en exercice.

Alors, $g_1(\vec{u}) =$ et $g_1(\vec{v}) =$.

De plus, si $j(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{n} + \vec{k}$ avec $\vec{n}$ normal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{k} \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, alors par bilinéarité,

$j(-\vec{u}, -\vec{v}) =$

D'autre part, par invariance par rapport au mouvement g_t , on a

$j(-\vec{u}, -\vec{v}) =$

Par conséquent,

Montrons maintenant que $j(\vec{u}, \vec{v}) = -j(\vec{v}, \vec{u})$.

Le deuxième mouvement h_t que vous décrirez en exercice échange deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même norme et renverse les vecteurs $\vec{n}$ qui leur sont perpendiculaires.

Ainsi, $h_1(\vec{u}) =$ et $h_1(\vec{v}) =$ et par suite,

$j(\vec{v}, \vec{u}) =$

Remarquons en particulier que $j(\vec{u}, \vec{u}) = \vec{0}$.

Choisissons maintenant une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{V}(\mathbb{R}^3)$.

Nous savons que $j(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \lambda_{ij}\vec{e}_k$ pour $1 \leq i \neq j \leq 3$ et $k \neq i, j$ puisque le vecteur obtenu est orthogonal à $\vec{e}_i$ et à $\vec{e}_j$. De plus $\lambda_{ij} = -\lambda_{ji}$. Observons encore que

d'où $\lambda = \lambda_{12} = -\lambda_{13}$. De même $\lambda_{23} = \lambda_{12}$. Nous en déduisons donc par bilinéarité que

$$j\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = j\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) =$$

□

Pour terminer, nous devons encore montrer que le produit vectoriel vérifie effectivement les deux conditions imposées, c'est-à-dire la bilinéarité et l'invariance par mouvements.

La bilinéarité se vérifie facilement. Le théorème qui suit affirme l'invariance par mouvements.

Théorème 2.5. *Le produit vectoriel est invariant par mouvement : pour tous les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et tout mouvement g_t , on a $g_t(\vec{u}) \wedge g_t(\vec{v}) = g_t(\vec{u} \wedge \vec{v})$*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'égalité est vraie pour toute isométrie directe g puisque la proposition 1.6 de la section précédente nous assure que g_t est directe pour tout t .

Nous pouvons aussi supposer que g fixe l'origine puisqu'une translation n'affecte pas les vecteurs et que le produit vectoriel se calcule précisément sur des vecteurs.

Nous sommes ainsi ramenés au cas où l'isométrie est une .

Au début de ce module, nous avons vu que le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur

de direction

de sens

de norme

Ainsi, pour toute rotation g_α , $g(\vec{u}) \wedge g(\vec{v}) = g(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

□

3 La polaire

On se donne un cercle Γ , de centre $C = (\alpha; \beta)$ et de rayon r , et un point $P = (a; b)$ du plan. Le théorème du produit constant nous dit que le produit

Définition 3.1. On appelle *puissance* du point P relativement au cercle Γ le produit scalaire

$$p(P; \Gamma) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}.$$

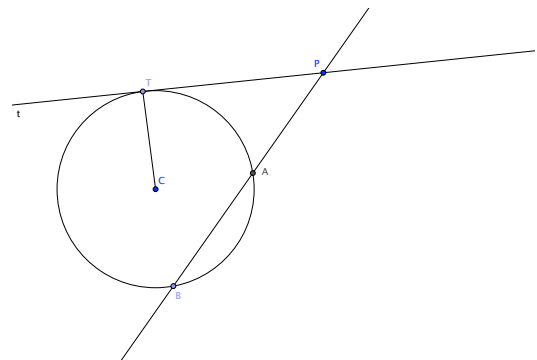
Proposition 3.2. Soit Γ un cercle de centre $C = (\alpha; \beta)$ et $P = (a; b)$ un point du plan. Alors

$$p(P; \Gamma) = \|\overrightarrow{CP}\|^2 - r^2 = (a - \alpha)^2 + (b - \beta)^2 - r^2 = \|\overrightarrow{PT}\|^2,$$

où T désigne le point de contact d'une tangente au cercle passant par P . La dernière égalité n'est valide que si P est extérieur au cercle.

Démonstration.

La première et la deuxième égalités sont obtenues



□

Définition 3.3. Soit Γ un cercle de centre C et de rayon r et P un point du plan distinct de C . La *polaire* de P relativement à Γ est le lieu géométrique des points M vérifiant la relation

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CM} = r^2.$$

Si le cercle est donné par son équation canonique cartésienne comme ci-dessus et $P = (a; b)$, alors l'équation des points $(x; y)$ de la polaire p de P relativement à Γ est

$$p : (a - \alpha)(x - \alpha) + (b - \beta)(y - \beta) - r^2 = 0.$$

C'est la même équation que celle de la tangente en un point du cercle ! On en déduit deux informations. La première, c'est que la polaire est une droite, la seconde que la notion de polaire généralise celle de tangente.

Proposition 3.4.

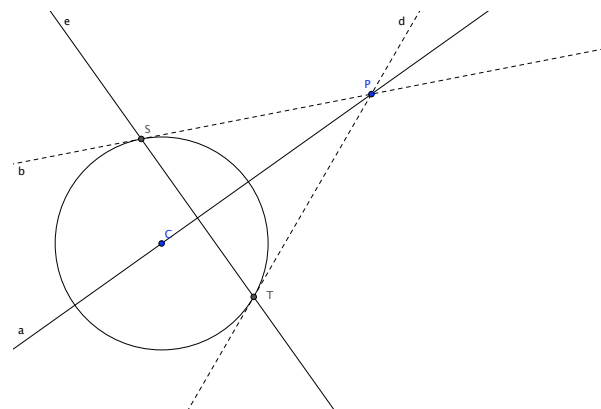
La polaire d'un point P relativement à un cercle Γ est une droite perpendiculaire au diamètre de Γ passant par P .

Démonstration. Soit M un point de la polaire et $\vec{n}$ un vecteur normal à la droite CP .

Si N est un point obtenu comme $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \lambda \vec{n}$, on a

□

Exemple 3.5. Lorsque le point P est à l'extérieur du cercle, considérons les points de tangence S et T des tangentes au cercle passant par P .



La polaire est donc la droite passant par S et T .

Si P est à l'intérieur du cercle, nous utilisons le théorème suivant pour construire sa polaire.

Théorème 3.6. de réciprocité. *Soient p et q les polaires de deux points P et Q relativement au même cercle. Alors $P \in q$ si et seulement si $Q \in p$.*

Démonstration. Si P appartient à la polaire de Q alors

$$\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2 \quad \text{qui est équivalent à} \quad \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} = r^2.$$

Donc Q appartient à la polaire de P . □

VI. Les inversions

1 Les inversions

Dans un cours classique de géométrie, on se restreint souvent à l'étude des transformations du plan ou de l'espace qui sont linéaires ou affines, qui préservent les distances ou au moins les rapports de distance. Or, il existe des transformations importantes qui ne sont pas du tout de cette forme, mais qui préservent les angles plutôt que les distances. L'usage des inversions remonte à Poncelet (1788-1867 ; élève de Monge ; prisonnier pendant les guerres napoléoniennes en Russie en 1812, il reprend tous les fondements de la géométrie et met en forme les bases de la géométrie projective, privé de tout livre ! A son retour en France en 1814, il rédige un traité qui sera publié en 1822 et qui aura une grande influence).



Considérons un cercle Γ dans le plan, de centre C et de rayon r . L'inversion est une application du plan, privé de C , dans lui-même qui fixe le cercle et "inverse" l'intérieur et l'extérieur du cercle.

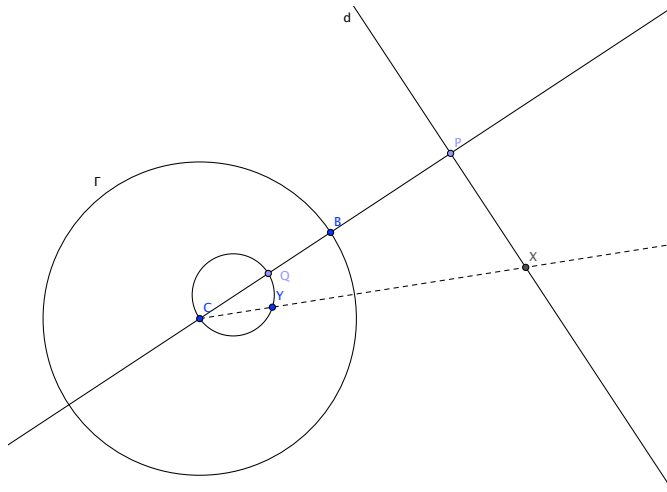
Définition 1.1. L'*inversion* par rapport au cercle $\Gamma(C; r)$ est l'application ι qui envoie un point P distinct de C sur le point $\iota(P) = Q$ dans la direction $[CP]$ tel que $\|CP\| \cdot \|CQ\| = r^2$. On appelle r le *rapport d'inversion*, le cercle Γ le *cercle d'inversion* et C le *pôle d'inversion*.

On déduit immédiatement de la définition que

Etudions l'effet d'une inversion sur les droites et les cercles du plan.

Proposition 1.2. *L'inverse d'une droite passant par le pôle d'inversion est cette même droite, l'inverse d'une droite ne passant pas par le pôle d'inversion est un cercle passant par le pôle. L'inverse d'un cercle passant par le pôle est une droite.*

Démonstration. Par définition l'inverse d'un point d'une droite passant par C reste sur cette droite. Considérons une droite d ne passant pas par C . Abaissons la perpendiculaire à d passant par C . Soit P le pied de cette perpendiculaire et son image par inversion $Q = \iota(P)$. Montrons maintenant que le cercle de diamètre CQ est l'image de d .



□

Même si les inversions transforment des droites en cercles, nous verrons qu'elles préservent les angles ! En fait, il faut voir les inversions comme des généralisations des symétries axiales dans une géométrie où les droites sont considérées comme des cercles de rayon infini. On peut alors effectuer des symétries axiales d'axe circulaire en toute généralité et naturellement les images de cercles sont des cercles, dont le rayon peut être fini ou infini !

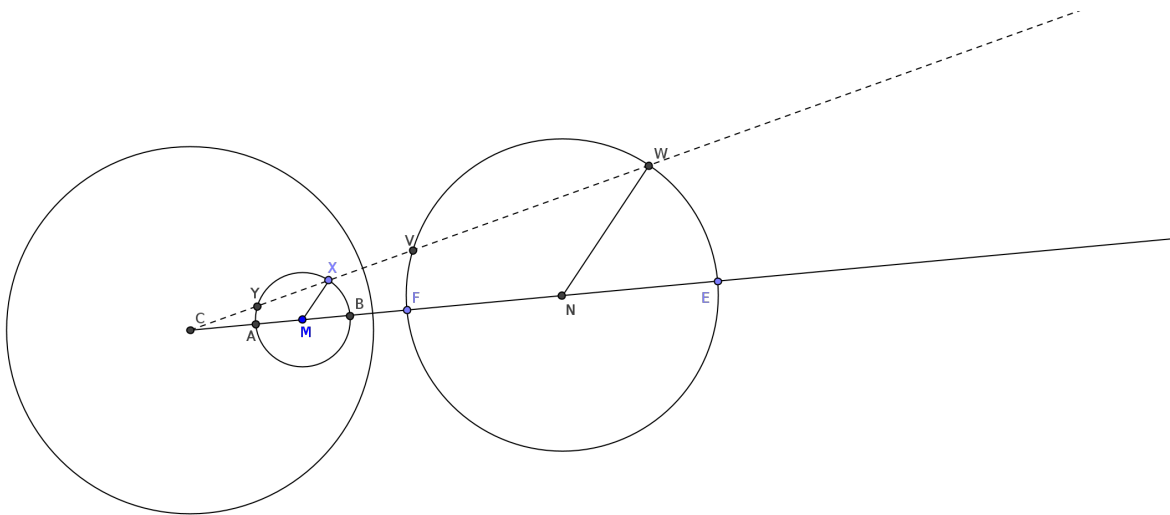
2 Les inversions et les cercles

Nous savons construire l'image par ι d'un cercle qui passe par C .

Mais quelle est l'image d'un cercle qui ne passe pas par le pôle d'inversion ?

Proposition 2.1. *L'inverse d'un cercle ne passant pas par le pôle d'inversion est un cercle homothétique du premier par rapport au pôle d'inversion.*

Démonstration. Traçons la demi-droite joignant C au centre M du cercle $\gamma(M, \rho)$ à inverser. Elle détermine un diamètre $[AB]$ de γ . Construisons les images $\iota(A) = E$ et $\iota(B) = F$. Nous affirmons que le cercle γ' de diamètre $[EF]$ est l'image du cercle donné $\gamma(M, \rho)$.



Appelons N le centre de γ' et calculons les rapports des rayons ρ et ρ' des cercles γ et γ' .

Par conséquent, le rapport des rayons des deux cercles est égal au rapport des distances du pôle d'inversion aux centres de ces cercles. Ceci signifie précisément que les cercles sont

Gardons cela en mémoire et considérons un point arbitraire X du premier cercle. Traçons la demi-droite issue de C et passant par X . Elle coupe le cercle de centre C en un autre point Y et celui de centre N en deux points V et W . Puisque les cercles sont homothétiques, les triangles $\triangle CMX$ et $\triangle CNW$ sont semblables, donc

De même, les triangles $\triangle CMY$ et $\triangle CNV$ sont semblables, donc

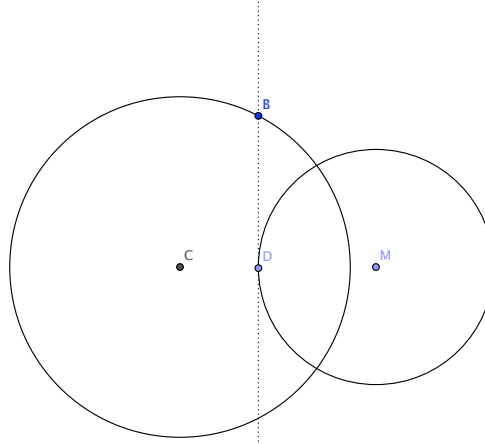
Montrons enfin que le produit $||CX|| \cdot ||CV||$ vaut bien r^2 . On a

□

Remarque 2.2. Nous avons montré que l'image par inversion d'un cercle ne passant pas par le pôle d'inversion est un cercle homothétique. Mais la preuve montre que l'image par l'inversion du centre M n'est pas le centre N ! Où se trouve l'image de M ? Est-elle plus proche de F ou de E ?

Exemple 2.3.

Construisons l'image du cercle γ de centre M par l'inversion par rapport au cercle Γ de centre C .



On connaît déjà deux points I et J de $\iota(\gamma)$: ce sont les points d'intersection des cercles γ et Γ .

Pour déterminer l'image de γ , il suffit donc de construire l'image d'un troisième point de γ .

Choisissons $D = \gamma \cap CM$ et traçons la tangente t_D en D à γ . t coupe γ en A et B .

La tangente t_B à Γ en B coupe CD en D' qui est l'image de D par inversion de cercle Γ .

N.B. L'image de la tangente t_B est

3 Les inversions et les angles

Notre but est de montrer que les inversions préservent les angles. Définissons d'abord en toute généralité ce qu'est l'angle entre deux courbes dérivables du plan.

Définition 3.1. Soit $c, d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux courbes dérivables dans le plan qui se coupent en $t = 0$. L'*angle* entre c et d au point $c(0) = d(0)$ est l'angle formé en ce point par les vecteurs tangents aux courbes.

Remarquons que l'angle entre deux cercles peut aussi être décrit comme l'angle formé par les rayons respectifs du centre au point d'intersection. Dans notre étude des inversions nous n'aurons besoin que des angles entre cercles et droites. Il y a plusieurs cas à considérer, mais il suffit d'étudier le cas de l'angle formé par deux droites puisque chaque cercle est remplacé par la droite tangente pour mesurer l'angle. Le premier cas est élémentaire : deux droites passant par le pôle d'inversion sont fixées par l'inversion si bien que l'angle reste le même.

Proposition 3.2. *Soit d une droite passant par le pôle d'inversion C et sécante en un point $P \neq C$ avec une droite e .*

Alors l'angle formé par la droite d et la droite e est égal à celui formé par d et le cercle $\iota(e)$.

Démonstration. La figure ci-dessous représente d, e et $\iota(e)$, mais pas Γ .

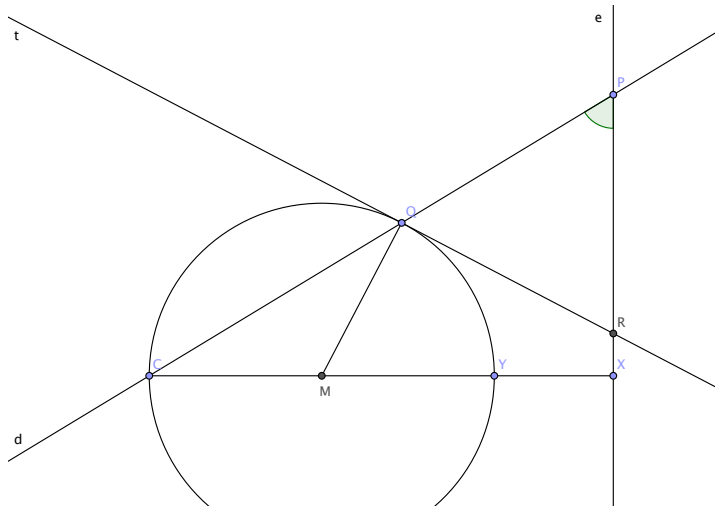
L'inverse de la droite e est un cercle $\iota(e)$ passant par .

X est la projection orthogonale de C sur e de sorte que $\iota(X) =$.

L'image $\iota(d) =$, si bien que l'image $\iota(P) = Q =$.

Soit t la tangente au cercle $\iota(e)$ au point $Q = \iota(P)$.

Nous devons montrer que l'angle formé par $\iota(d) = d$ et t est égal à l'angle entre d et e en P .



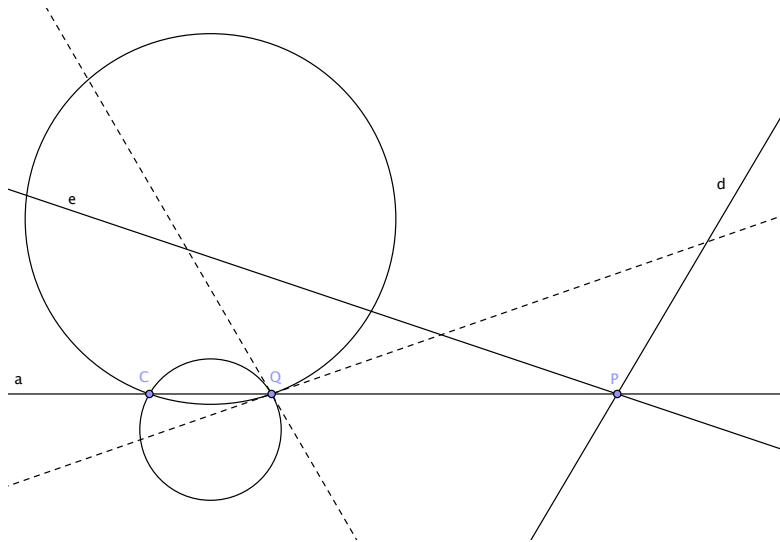
Notons M le centre du cercle $\iota(e)$.

L'angle formé par le rayon $[MQ]$ et la tangente t est , si bien que

□

Proposition 3.3. *Soit d et e deux droites ne passant pas par le pôle d'inversion C et sécantes en un point P . Alors l'angle formé par ces droites est égal à celui formé par les cercles $\iota(d)$ et $\iota(e)$.*

Démonstration. Les images de d et e sont deux cercles passant par le pôle d'inversion C . L'image de P est l'autre point d'intersection Q de ces deux cercles.



Introduisons la droite annexe $a = CP$, qui est fixée par l'inversion. Alors, par la proposition précédente, les angles en P entre a et d et entre a et e sont préservés par l'inversion.

Le résultat est alors immédiat. □

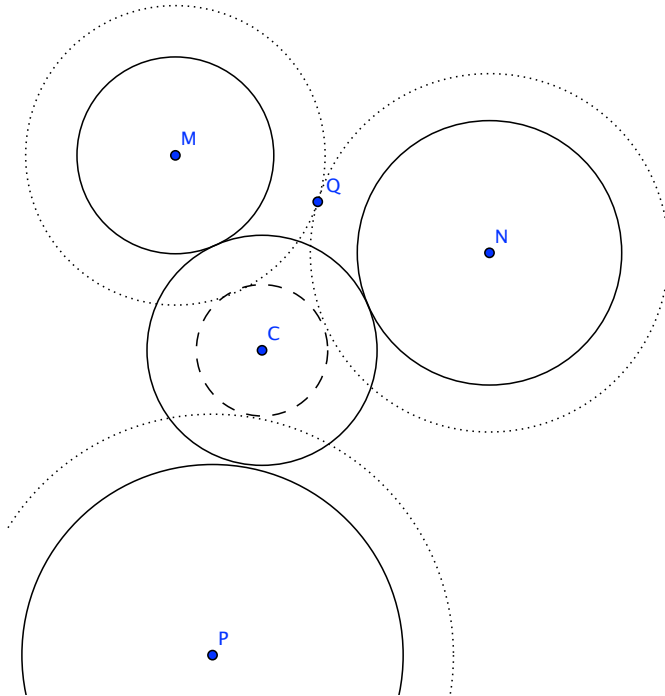
Théorème 3.4. *Les inversions préservent les angles entre droites et cercles.*

4 Le problème d'Apollonius

Le problème d'Apollonius consiste à construire un cercle tangent à trois cercles donnés. La solution utilise des inversions car il est plus aisé de raisonner avec des droites qu'avec des cercles. Avant de commencer, remarquons que la propriété d'être tangent est préservée par inversion puisque deux cercles sont tangents si et seulement si ils ont un unique point commun.

Pour fixer les idées, supposons que les cercles $\gamma_1(M, r)$, $\gamma_2(N, s)$ et $\gamma_3(P, t)$ sont donnés. Supposons ensuite que les distances δ_{ij} entre deux cercles γ_i et le γ_j soient telles que

$$\delta_{13} = ||MP|| - r - t \geq \delta_{23} = ||NP|| - s - t \geq \delta_{12} = ||MN|| - r - s.$$

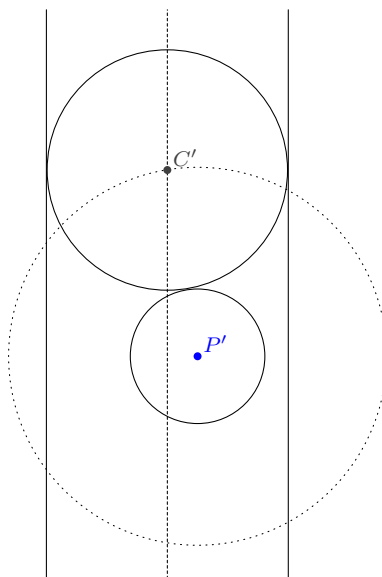


Ainsi, un cercle de centre C et de rayon R est tangent à la fois aux cercles $\gamma_1(M, r)$ et $\gamma_2(N, s)$ si et seulement si le cercle de même centre C et de rayon $R + r + s$ est tangent à la fois aux cercles de centre M et N et de rayon respectif r et s .

Augmentons donc les rayons des trois cercles γ_1, γ_2 et γ_3 de r, s et t respectivement.

Les deux cercles qui étaient les plus proches deviennent alors tangents.

L'astuce est d'appliquer une inversion de centre Q qui transforme les deux cercles tangents en deux droites parallèles tangentes à la droite MN et le troisième cercle en un cercle homothétique de centre P' et de rayon t' .



Il y a deux centres possibles pour un cercle tangent à la fois aux deux droites parallèles et au cercle de centre P' . Le problème d'Apollonius aurait-il plusieurs solutions ?