Cours Euler: Corrigé 33

21 mai 2025

Exercice 1

Commençons par calculer l'aire de ADP, PBC et $ABCD$:

$$\begin{aligned}\text{Aire}(ADP) &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3.5 = 14 \text{ cm}^2 \\ \text{Aire}(PBC) &= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2.5 = 15 \text{ cm}^2 \\ \text{Aire}(ABCD) &= 6 \cdot \left(\frac{8+12}{2}\right) = 60 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Comme Q est le milieu de PC, par l'exercice 8, série 31, les aires de DPQ et DCQ sont les mêmes. Calculons donc l'aire de DPC :

$$\text{Aire}(DPC) = \text{Aire}(ABCD) - \text{Aire}(ADP) - \text{Aire}(PBC) = 60 - 14 - 15 = 31 \text{ cm}^2$$

Donc

$$\text{Aire}(DPQ) = \text{Aire}(DCQ) = \frac{\text{Aire}(DPC)}{2} = 15.5 \text{ cm}^2$$

Donc les aires de DPC et DPQ sont les plus grandes.

Exercice 2

1) $r = 0$

2) $r = +\infty$

3) $r < 0$. Plus précisément, lorsque P se rapproche de A, r se rapproche de 0 ; et lorsque P s'éloigne de A, r devient un nombre négatif de plus en plus petit.

4) $0 \leq r < 1$. Plus précisément, lorsque P se rapproche de A, r se rapproche de 0 ; et lorsque P s'éloigne de A, r se rapproche de 1.

5) $r > 1$. Plus précisément, lorsque P se rapproche de B, r devient de plus en plus grand ; et lorsque P s'éloigne de B, r se rapproche de 1.

6) Il y a deux cas à traiter : $P \in [AB]$ et $P \notin [AB]$. Dans le premier cas, $r = 1$ si et seulement si $|PA| = -|PB|$ si et seulement si $|PA| = 0 = |PB|$ si et seulement si $P = A = B$. Or $A \neq B$ (car $[AB]$ est un segment orienté), donc $r = 1$ est impossible. Dans le second cas, $r = 1$ si et seulement si $|PA| = |PB|$ si et seulement si P est le milieu de $[AB]$. Or ici, $P \notin [AB]$, donc $r = 1$ est impossible.

Exercice 3

1) $r(AC,E) = \dfrac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = \dfrac{3\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB}}{\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB}} = \dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{7}{3}.$

2) $r(BE,A) = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{AB}}{3\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB}} = \dfrac{1}{\frac{7}{2}} = \dfrac{2}{7}.$

3) $r(BF,C) = -\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CF}} = -\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{AB}} = -\dfrac{2}{5}.$

4) $r(FD,B) = \dfrac{\overline{BF}}{\overline{BD}} = \dfrac{3\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB}}{2\overline{AB}} = \dfrac{7}{4}.$

5) $r(AD,A) = \dfrac{\overline{AA}}{\overline{AD}} = \dfrac{0}{\overline{AD}} = 0.$

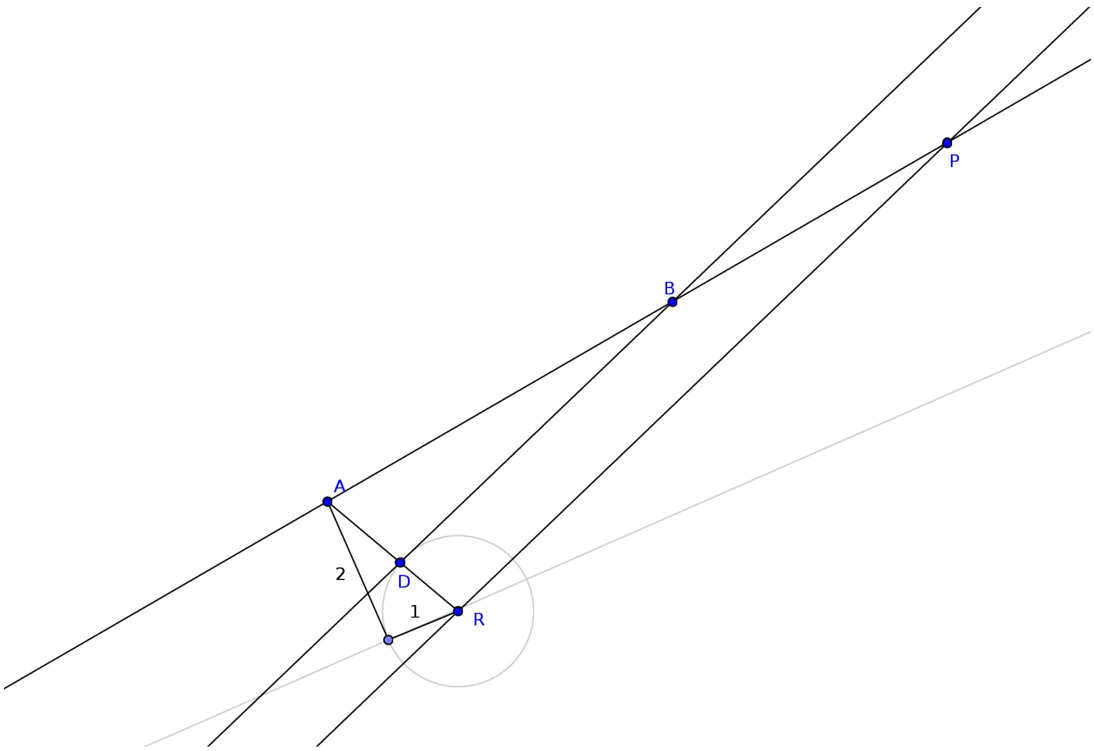
6) $r(AE,D) = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DE}} = -\dfrac{3\overline{AB}}{\frac{1}{2}\overline{AB}} = -6.$

7) $r(DA,C) = -\dfrac{\overline{CD}}{\overline{CD}} = -\dfrac{\overline{AB}}{2\overline{AB}} = -\dfrac{1}{2}.$

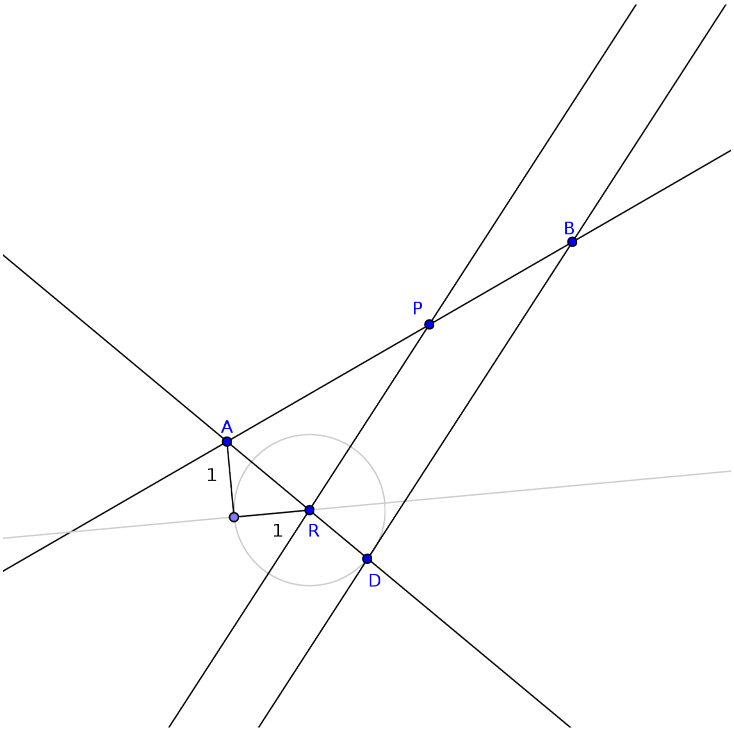
Exercice 4

Voici les constructions des rapports de section cherchés sur un segment $[AB]$ donné en utilisant la méthode vue au cours. Nous ne vous en demandions pas tant ici et il suffisait de construire les segments $[AR]$, qui ont la longueur $|r|$ voulue par le Théorème de Pythagore, et le point D.

1) Notons que $\overline{AR} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$

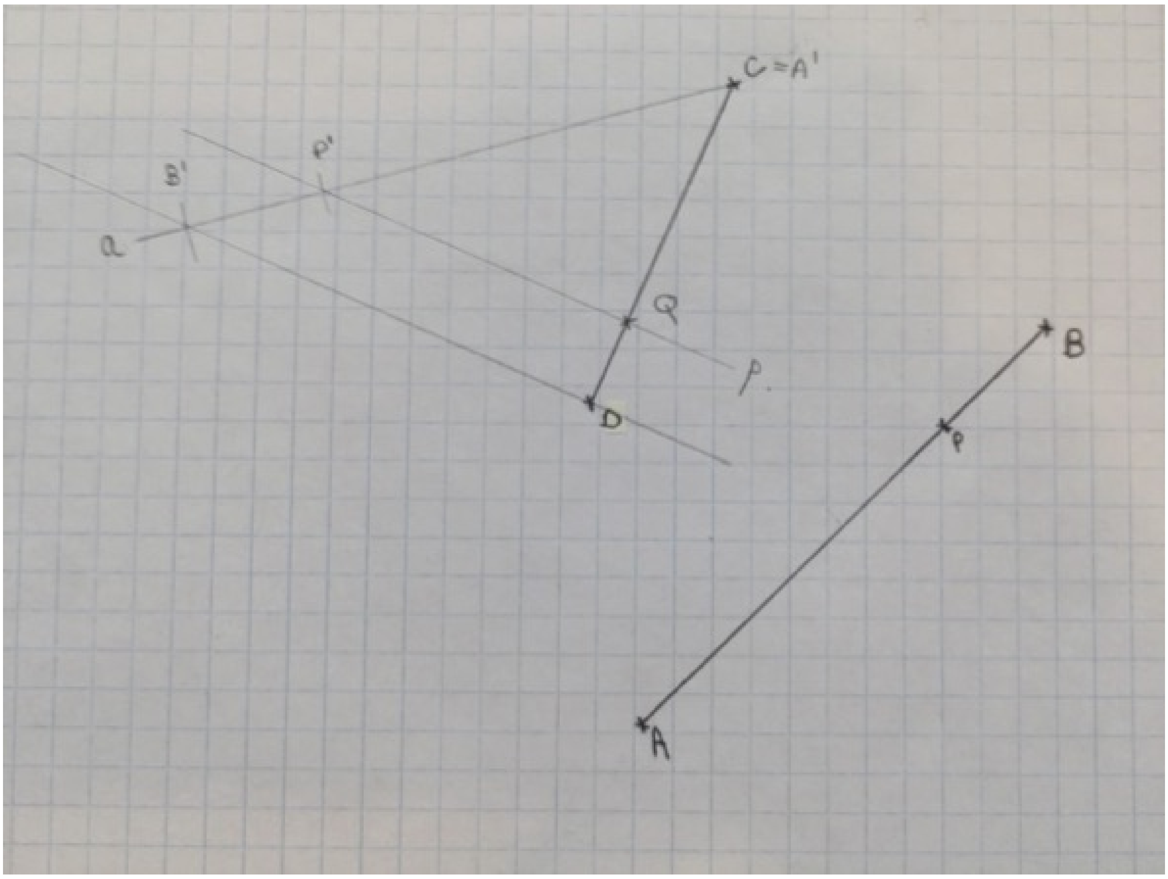


2) Notons que $\overline{AR} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$



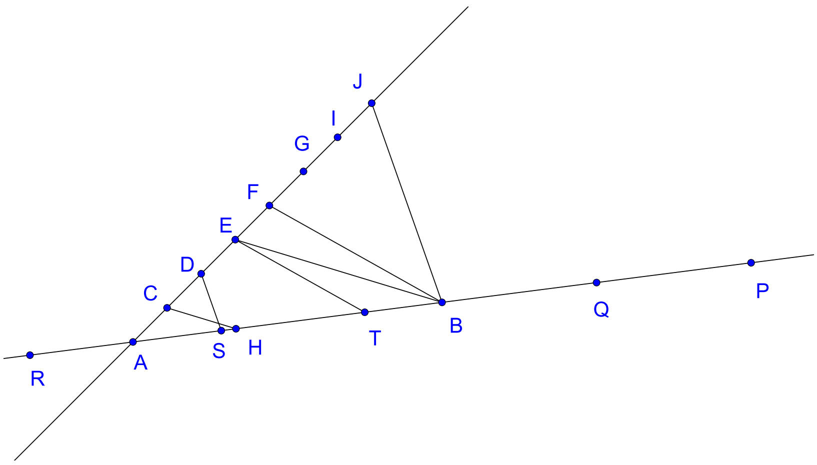
Exercice 5

Tracer une demi-droite Ca telle que l'angle aCD soit ni nul ni plat. Reporter sur la demi-droite Ca les distances $\overline{AP}$ et $\overline{AB}$ pour obtenir respectivement les points P' et B'. Construire la parallèle à la droite $B'D$ passant par P'. Elle coupe la droite DC en Q. Notons $A' = C$. La section $(A'B', P)$ est isomorphe à la section (AB, P) et donc elles ont le même rapport. De plus, par le théorème de Thalès, les sections (CD, Q) et $(A'B', P')$ ont le même rapport.



Exercice 6

Voici les points P, Q, R, S et T obtenus par la construction.



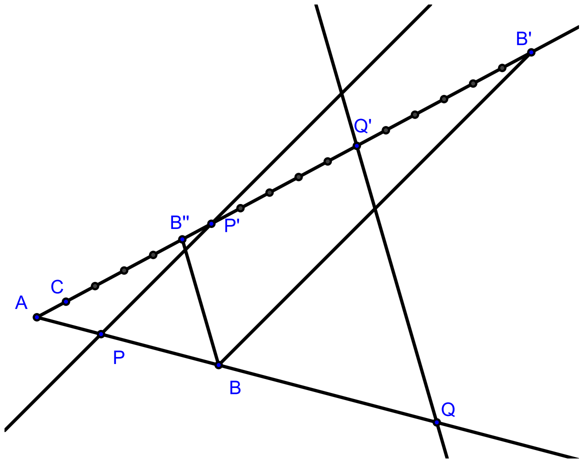
Marche à suivre pour R. Traçons une demi-droite $[Aa$ d'extrémité A déterminant un angle ni nul ni plat avec la demi-droite $[AB$. Plaçons un point $C \neq A$ sur cette demi-droite et reportons la distance $\overline{AC}$ depuis C pour obtenir D, puis cette distance sur Da pour obtenir E et ainsi de suite jusqu'à J. Traçons la droite EB et construisons la parallèle à cette droite passant par C. Soit H l'intersection de cette parallèle avec AB. Reportons la distance $\overline{AH}$ sur la demi-droite d'extrémité A et support AB qui ne contient pas B. On obtient le point R recherché.

En effet, par le théorème de Thalès $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{AC}}{3\overline{AC}} = \dfrac{1}{3}$. Ainsi, $(AB, R) = \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 7

Tracer la demi-droite $[AB$ puis une demi-droite $[AC$ de sorte que l'angle BAC ne soit ni nul ni plat. Reporter seize fois la longeur $\overline{AC}$ sur la demi droite $[AC$. Nommer B' le dix-septième point sur la demi-droite $[AC$ et P' le sixième, si bien que $\dfrac{\overline{P'A}}{\overline{P'B'}} = \dfrac{6}{11}$. Alors, en construisant la parallèle à $[BB']$ par P', on obtient, par le théorème de Thalès, $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{6}{11}$ et donc $(AB, P) = -\dfrac{6}{11}$.

Nommer B'' le cinquième point sur la demi-droite $[AC$ et Q' le onzième, si bien que $\dfrac{\overline{Q'A}}{\overline{Q'B''}} = \dfrac{11}{6}$. Alors, en construisant la parallèle à $[BB'']$ par Q', on obtient, par le théorème de Thalès, $(AB, Q) = \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \dfrac{11}{6}$.



Exercice 8

En considérant l'angle en A commun au triangle ΔABC et au triangle $\Delta AB'C'$, on sait, par la proposition du cours sur le rapport des aires de deux triangles ayant un angle isométrique, que

$$\frac{\sigma(\Delta ABC)}{\sigma(\Delta AB'C')} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{AB'}\cdot\overline{AC'}}.$$

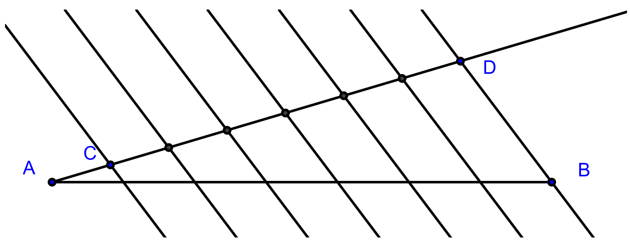
De même, l'angle en B du triangle ΔABC et celui en B' du triangle $\Delta AB'C'$ sont correspondants donc égaux. Par conséquent, nous savons par la même proposition que

$$\frac{\sigma(\Delta ABC)}{\sigma(\Delta AB'C')} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{AB'}\cdot\overline{B'C'}}.$$

La comparaison des deux rapports montre que $\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$. On conclut que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$.

Exercice 9

Soit $[AB]$ le segment que l'on veut diviser en sept parties isométriques. Tracer une demi-droite $[AC$ avec C de sorte que l'angle BAC ne soit ni nul ni plat. Reporter six fois la distance $\overline{AC}$ sur la demi-droite, jusqu'au point D de sorte que le segment $[AD]$ est partagé en sept parties égales. Puis construire successivement les parallèles à la droite BD passant par tous les points construits précédemment sur la demi droite $[AC$. Les intersections de ces parallèles avec le segment $[AB]$ nous donnent les points pour partager le segment $[AB]$ en 7 parties égales (Remarquons que cette construction est valable grâce au théorème de Thalès).



Exercice 10

Théorème de Thalès généralisé.
On veillera à vérifier que le raisonnement ci-dessous s'applique dans tous les cas, y compris lorsque les deux transversales se coupent à l'intérieur de la bande déterminée par les parallèles ou si les transversales sont parallèles.
La droite AC' coupe la droite CC' et donc aussi la droite $BB' \,/\!/\, CC'$. Soit D l'intersection des droites BB' et AC'. Par le théorème de Thalès appliqué au triangle CAC' et à la parallèle BB' à CC', on a $(AB, C) = (AD, C')$. Par le même théorème appliqué au triangle $AC'A'$ et à la parallèle BB' à AA', on a $(AD, C') = (A'B', C')$. Ainsi, en mettant ensemble ces deux égalités, on obtient $(AB, C) = (A'B', C')$.

Exercice 11 (Optionnel)

Notons O le centre de la Terre, M le point où la corde est plantée à Marin et Y le point où la corde est plantée à Yverdon. Notons aussi I le milieu de la corde, et J l'intersection de la droite IO avec la surface du lac. Ainsi $\overline{IJ}$ est la profondeur du milieu de la corde. Rappelons que par une proposition du cours sur les intersections de cercles et de droites, le diamètre IO, puisqu'il passe par le milieu I de la corde $[MY]$, est perpendiculaire à la droite MY. Le triangle MIO est donc rectangle en I.
Le rayon de la Terre est 6400 km.
Par le théorème de Pythagore :

$$6400^2 = \overline{MO}^2 = \overline{IO}^2 + \overline{IM}^2 = \overline{IO}^2 + \left(\frac{38}{2}\right)^2$$

Ainsi

$$\overline{IO} = \sqrt{6400^2 - 19^2} = 6399.9717977 \text{ km}$$

Donc

$$\overline{IJ} = \overline{JO} - \overline{IO} = 6400 - 6399.9717977 \approx 28 \text{ m}$$

Exercice 12 (Optionnel)

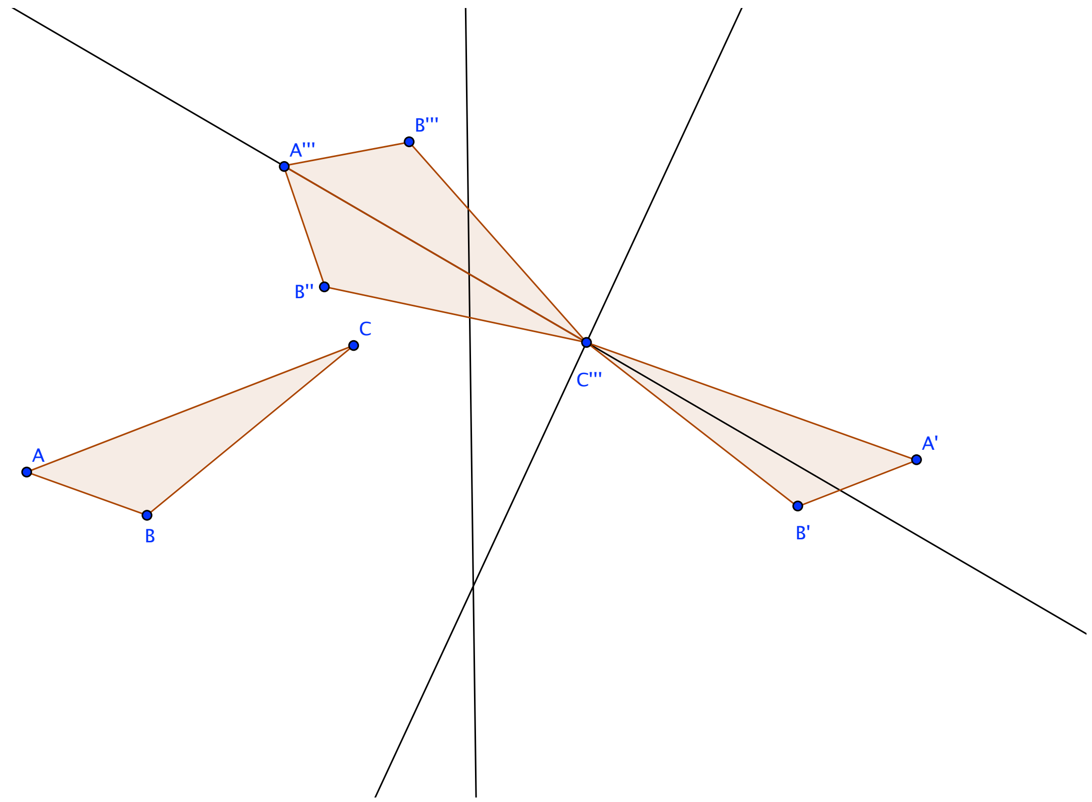
Vrai ou Faux ?

1) La somme des angles d'un rhomboïde vaut 360°. Vrai. Un rhomboïde est un quadrilatère simple-Il n'est pas forcément convexe, mais la diagonale qui forme son axe de symétrie le partage en deux triangles.
2) Une isométrie qui est la composition de trois symétries axiales renverse l'orientation. C'est vrai. Chaque symétrie axiale renverse l'orientation.
3) Une isométrie qui est la composition de trois symétries axiales n'a pas de point fixe. C'est faux, même s'il existe des renversements sans point fixe, la composition de trois symétries axiales peut aussi donner une symétrie, par exemple $S_a \circ S_a \circ S_a = S_a$.
4) Une isométrie qui est la composition de deux symétries axiales a toujours un point fixe. C'est faux, les translations n'ont aucun point fixe.
5) Dans un triangle une médiane passe toujours par l'un des sommets. C'est vrai. C'est la médiatrice qui ne passe pas en général par le sommet opposé.

6) Deux triangles rectangles ayant leur hypoténuses isométriques sont isométriques. C'est faux. Il existe une infinité de triangles rectangles ayant une hypoténuse donnée. Les sommets possibles se trouvent sur le cercle de Thalès !
7) Deux triangles rectangles ayant leurs cathètes isométriques deux à deux sont isométriques. C'est vrai. Le deuxième cas d'isométrie des triangles permet de conclure.
8) Un trapèze a toujours soit un centre de symétrie, soit un axe de symétrie. C'est faux. S'il a un centre de symétrie, c'est un parallélogramme. S'il a un axe de symétrie c'est un trapèze isocèle ou un losange.
9) Un trapèze ayant à la fois un centre de symétrie et un axe de symétrie est un rectangle. C'est faux. Un losange n'est pas un rectangle.
10) Un carré est un parallélogramme. C'est vrai par définition.
11) Il existe des triangles équilatéraux rectangles. C'est faux, les angles d'un triangle équilatéral mesurent tous 60°.
12) L'orthocentre d'un triangle est le point d'intersection des trois médianes. C'est faux. c'est le point d'intersection des hauteurs. Celui des médianes s'appelle centre de gravité ou barycentre.
13) Dans un triangle un segment moyen mesure les deux-tiers du côté correspondant. C'est faux. Il mesure la moitié. C'est le barycentre qui se trouve aux tiers de chaque médiane.
14) Tout cerf-volant est inscrit dans un cercle. C'est faux. Seuls les cerf-volants ayant un angle droit sont inscriptibles !
15) Pour tout cercle il existe un cerf-volant inscrit dans ce cercle. C'est vrai. On peut par exemple choisir un carré (ou un cerf-volant ayant un angle droit).
16) Tout cerf-volant inscrit dans un cercle est un rectangle. C'est faux, voir ci-dessus.
17) C'est vrai, le point d'intersection des médiatrices se trouve à égale distances des trois sommets.
18) C'est faux, il mesure le double.
19) C'est faux, ce serait vrai si deux sommets se trouve un même diamètre (cercle de Thalès).
20) C'est vrai, c'est la région comprise entre deux doubles arcs capables, d'angles respectivement 45 et 90 degres.

Exercice 13

Test 2014 : Isométries. (25 points)



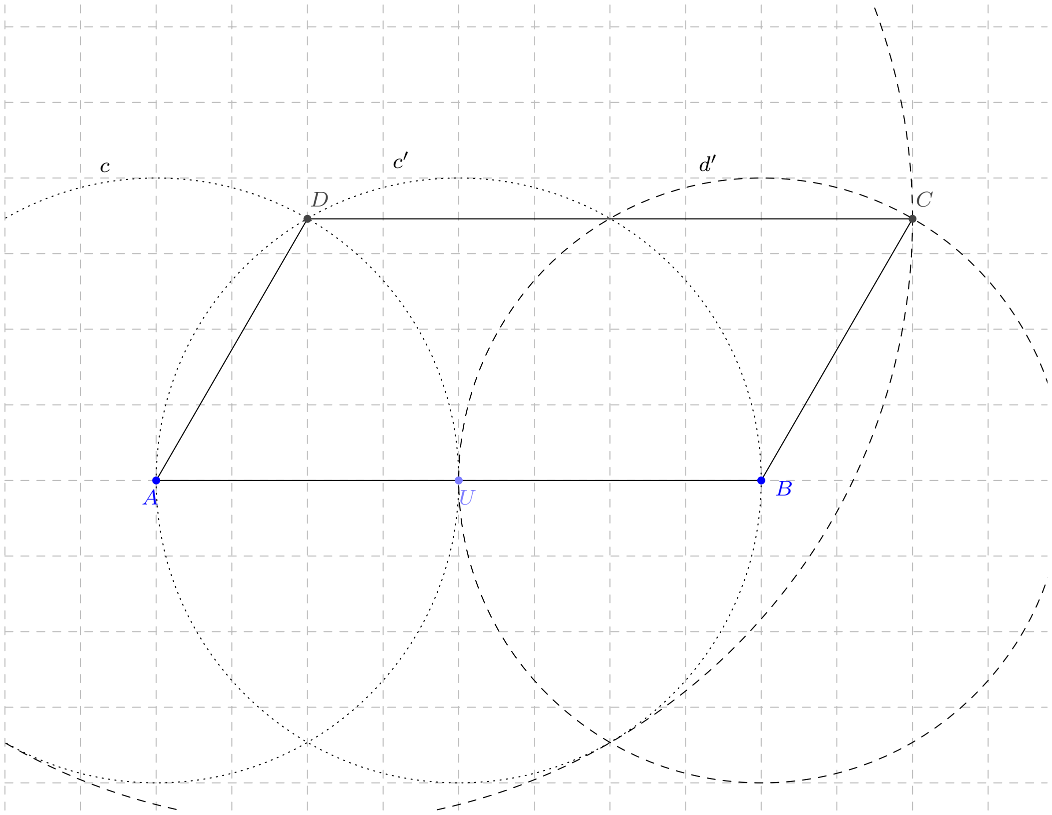
(1) Sur la figure on a construit des axes b et c de la façon suivante. Comme a est la médiatrice de $[CC''']$, le triangle obtenu par symétrie axiale d'axe a à partir du triangle ΔABC est un triangle $\Delta A'B'C'''$. On choisit par exemple pour b la médiatrice de $[A'A''']$ de sorte que l'image du triangle $\Delta A'B'C'''$ par la symétrie d'axe b soit un triangle $\Delta A'''B''C'''$. On pourrait s'arrêter ici si $B'' = B'''$. Ce n'est pas le cas et il faut encore choisir pour c la médiatrice du segment $[B''B''']$.

(2) L'isométrie f renverse l'orientation car c'est une composition d'un nombre impair de symétries axiales. Chacune de ces symétries axiales renverse l'orientation.

(3) Une composition de trois symétries axiales est soit une symétrie axiale, soit un renversement sans point fixe. Nous avons construit des axes a, b et c qui n'ont aucun point en commun, qui ne sont ni parallèles ni confondus, et tels que $f = S_c \circ S_b \circ S_a$. Un résultat du cours garantit que f est un renversement sans point fixe. Si les trois axes avaient un point d'intersection commun, ce serait une symétrie axiale.

Exercice 14

Construction. (Test 2014 : 25 points)
(1)(2)



Marche à suivre.

1. Tracer un segment $[AU]$ de longueur 4 cm, puis le doubler pour obtenir un segment $[AB]$ de longueur 8 cm.
2. Tracer le cercle c de centre A et de rayon 4 cm, puis le cercle c' de centre U et de même rayon.
3. Choisir D l'un des points d'intersection des deux cercles c et c'.
4. Tracer le cercle d de centre D et de rayon 8 cm et le cercle d' de centre B et de rayon 4 cm.
5. Le point d'intersection
6. Le quadrilatère $ABCD$ est le parallélogramme cherché.

(3) L'angle en A angle mesure 60° par construction et l'angle opposé aussi (par symétrie) et les deux autres angles mesurent 120°, car ils sont isométriques et la somme des angles de ce parallélogramme vaut 360°.

(4) **Bonus** Comme l'angle en A vaut 60° et $\overline{AM} = 4$ cm $= \overline{AD}$, on sait que AMD est équilatéral. Nommons P le pied de la hauteur de ce triangle issue de D. Rappelons que hauteur d'un triangle isocèle en D est confondue avec la médiatrice de sa base opposée [AM]. Ainsi, $\overline{AP} = \overline{AP} : 2 = 2$ cm. Par le théorème de Pythagore (comme on a un angle droit en P par définiton de la hauteur) : $\overline{DP}^2 = \overline{AD}^2$ - $\overline{AP}^2 = 4^2$ - $c^2 = 16$ - $4 = 12$. Par conséquent, la longueur de la petite hauteur du parallélogramme vaut $\overline{DP} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.