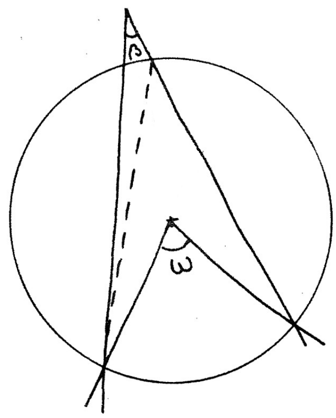
Cours Euler: Série 31

7 mai 2025

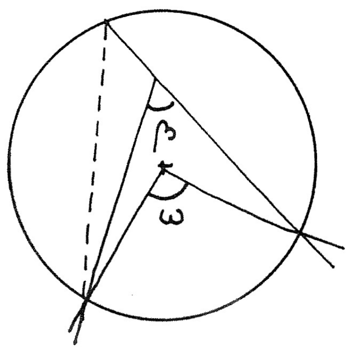
Exercice 1

Dans la situation proposée par le croquis,

a) Montre que ß < $\frac{1}{2}$ ω



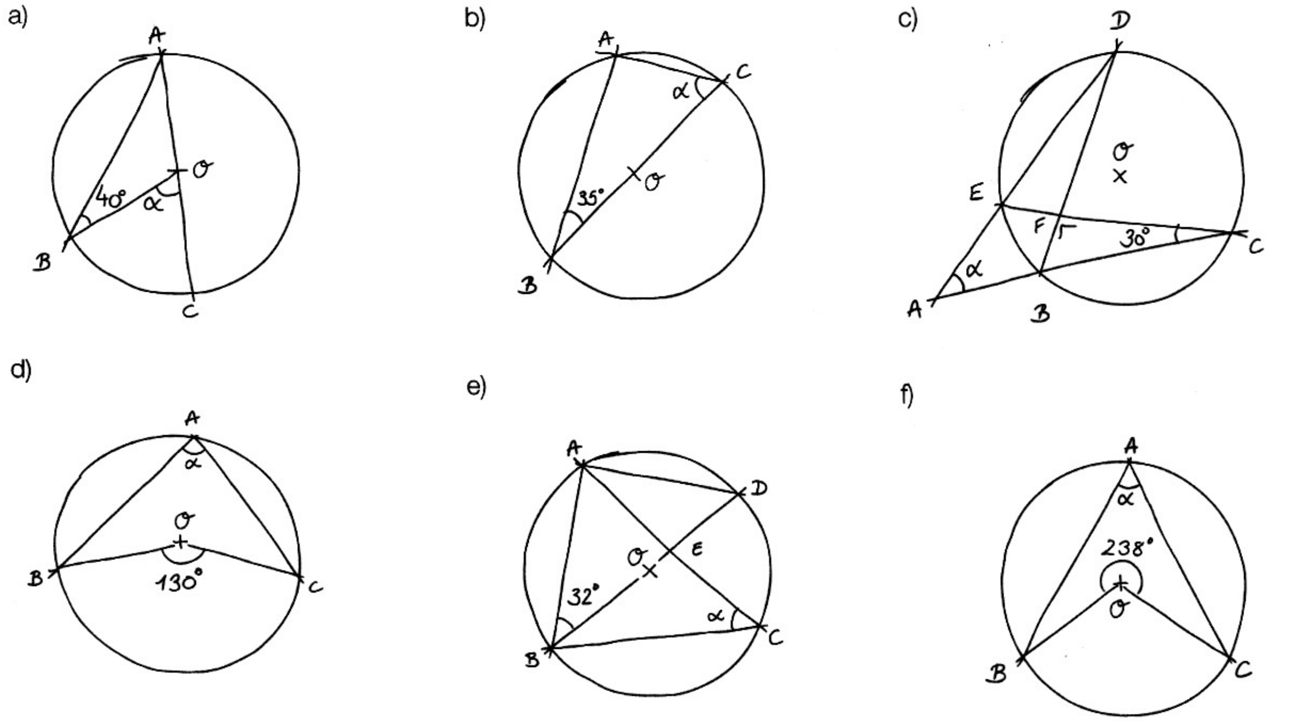
b) Montre que ß > $\frac{1}{2}$ ω



c) Utilise ce résultat (même si tu n'as pas réussi à le démontrer) pour terminer la démonstration du théorème de l'arc capable : montre que les deux arcs construits dans le théorème sont les seuls points qui vérifient la condition du lieu géométrique (on a déjà montré qu'ils la vérifient ; il restait à montrer qu'il n'y a pas d'autres points avec cette propriété).

Exercice 2

Calcule et justifie, dans chaque cas, la valeur de l'angle α :



Exercice 3

Effectue les constructions suivantes et répond aux questions.

1. Trace un segment $[XY]$ de 7,3 cm.
2. Construis la médiatrice m de $[XY]$.
3. Trace une demi-droite $[Xn$ qui fait un angle de $64°$ avec XY. Aide-toi de ton rapporteur !
4. Construis la perpendiculaire p à la demi-droite $[Xn$ qui passe par X.
5. Appelle O le point d'intersection de p et m.
6. Trace le cercle $c(O; [OX])$; celui-ci coupe m en deux points K et L.
7. Sur l'arc de cercle $\widehat{XKY}$ place cinq points R, S, T, U et V.
8. Quelles sont les mesures des angles $\widehat{XRY}, \widehat{XSY}, \widehat{XTY}, \widehat{XUY}$ et $\widehat{XVY}$? Pourquoi ?

Exercice 4

Cercles de Thalès.

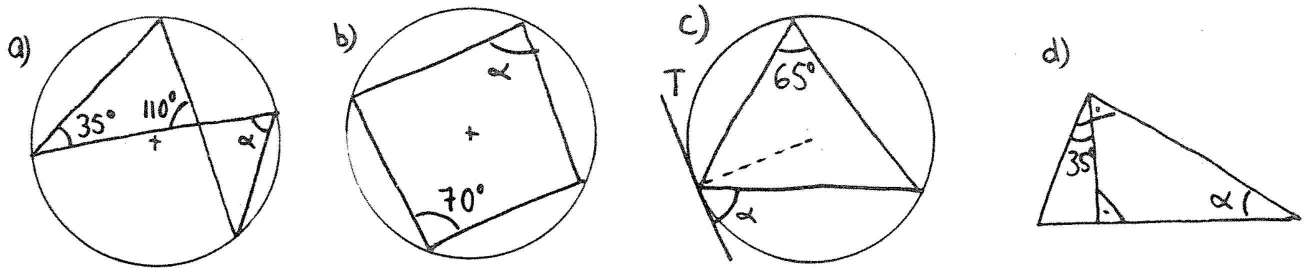
1) On donne un triangle ΔQRS rectangle en Q, ainsi que sa hauteur QO. Le cercle de Thalès de $[QO]$ coupe $[QR]$ en en un point U et $[QS]$ en I. Que peut-on dire du quadrilatère $QUOI$?

2) Dessine deux cercles sécants de rayons différents. Soient A et B les points d'intersection. Trace les diamètres d'extrémité A de chacun de ces deux cercles. L'autre extrémité s'appelle P et respectivement Q. Observe les points P, B et Q. Que peux-tu dire ? Justifie ton affirmation !

Exercice 5

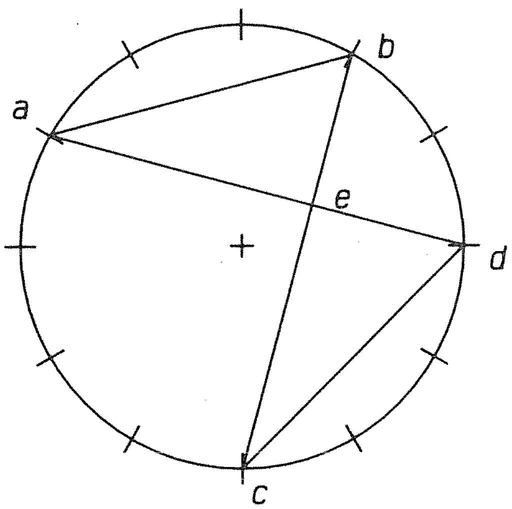
EXERCICE 141

Calcule dans chaque cas la mesure de l'angle α.



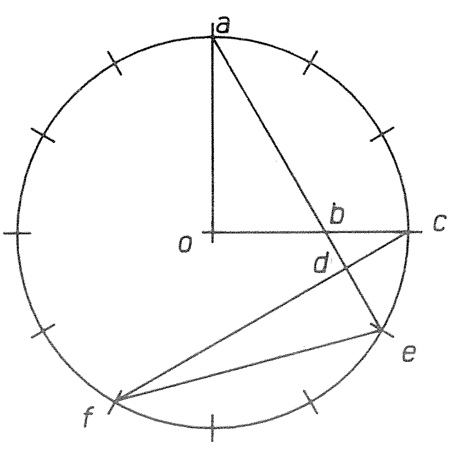
T est une tangente
au cercle

EXERCICE 142



Le cercle *C* est partagé en douze parties isométriques.
Calcule la mesure des angles des triangles *abe* et *edc*.

EXERCICE 143



Le cercle *C* est partagé en douze parties isométriques.
Calcule la mesure des angles des triangles *oab, bcd* et *def*.

Exercice 6

Double arc capable.

1) Trace un triangle ΔOAB isocèle en O. Où faut-il placer le point S pour que l'angle $\widehat{ASB}$ mesure la moitié de l'angle $\widehat{AOB}$? Effectue un dessin soigné, à la règle et au compas, de la situation où l'angle en O vaut 40°.

2) Trace un segment $[AB]$ et un cercle c de centre C de telle sorte que A et B appartiennent à c et que l'angle au centre soit égal à 120°. Prolonge $[BC]$ de sorte qu'il coupe le cercle en un point T.

   a) Calcule l'angle $\widehat{ATB}$. Justifie !

   b) Où sont tous les points qui interceptent $[AB]$ sous le même angle que T ?

   c) Sous quel angle voit-on $[AB]$ depuis un point de c qui ne se trouve pas du même côté de $[AB]$ que T ? Pourquoi ?

Exercice 7

Théorème de Pythagore. Nous revoyons ici une preuve du Théorème de Pythagore. Soit ΔAEH un triangle rectangle en A dont l'hypoténuse mesure a et les deux cathètes mesurent b et c. Le but est de montrer que $a^2 = b^2 + c^2$.

1) Construis un carré $ABCD$ de côté $b + c$. Chaque côté est partagé en deux segments de longueur b et c.

2) Si E, F, G et H sont les points sur les quatre côtés du carré tels que $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = b$, construis les segments $[EF], [FG], [GH]$ et $[HE]$.

3) Démontre en utilisant explicitement un cas d'isométrie des triangles que tu as construis quatre triangles isométriques.

4) Déduis du point précédent que le quadrilatère $EFGH$ est un losange.

5) Démontre que le quadrilatère $EFGH$ est un carré de côté a.

6) Calcule l'aire de ce carré et l'aire de chacun des quatre triangles rectangles isométriques.

7) Calcule l'aire du carré de côté $b + c$. Compare cette aire avec les aires calculées précédemment et conclus que $a^2 = b^2 + c^2$.

Exercice 8

Où doit-on placer un point M sur le côté $[BC]$ d'un triangle ΔABC de sorte que les périmètres des deux triangles ΔAMB et ΔAMC soient égaux ? On rappelle que le périmètre d'un triangle est la somme des mesures des trois côtés. Et si l'on souhaite que les aires soient égales ? Pour répondre il sera utile de savoir que l'aire d'un triangle est égale à « la moitié de la base fois la hauteur ».

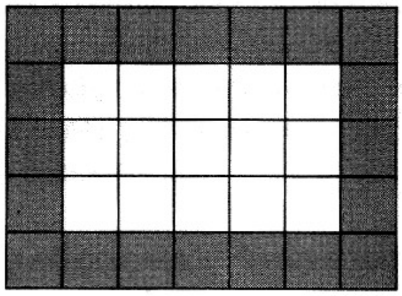
Exercice 9

214. Le marchand de tapis

Jean-Marie est marchand de tapis. Il aimerait créer un modèle qui ait autant de carrés gris touchant le bord que de carrés blancs à l'intérieur.

Son apprenti Maurice lui a proposé ce modèle qui, malheureusement, ne convient pas, car il a 15 carrés blancs intérieurs et 20 carrés gris sur la bordure.

Jean-Marie parviendra-t-il à créer des tapis à son idée ?



Exercice 10 (Optionnel)

219. Mini

Le triangle ABC est rectangle en A.

On projette orthogonalement un point M du segment BC sur les côtés AB et AC, respectivement en I et J.

Où faut-il placer M pour que le segment IJ soit minimal ?