Linear Algebra 2 – Grading Scheme

Award points only if arguments are complete. No half points are to be given. One point is deducted for incorrect statements (maximum one point per subquestion). There are no negative total points per subquestion in the open part.

Open Questions Grading Scheme

Question 21 (3 points)

$\lambda_1 = \max_{x \in S^{(n-1)}} x^T A x$ et $\lambda_n = \min_{x \in S^{(n-1)}} x^T A x$.

(+1 point)

Pour tout i, $e_i \in S^{(n-1)}$ et $e_i^T A e_i = a_{ii}$. Alors $\lambda_1 \geq a_{ii}$ pour tout i.

(+1 point)

Pour tout i, $e_i \in S^{(n-1)}$ et $e_i^T A e_i = a_{ii}$. Alors $\lambda_n \leq a_{ii}$ pour tout i.

(+1 point)

Question 22 (3 points)

a) A est similaire à une matrice $J \in K^{n \times n}$ en forme normale de Jordan avec que des 0 sur sa diagonale (Remarque 7.20 du cours).

(+1 point)

$p_A(x) = p_J(x) = (-1)^n x^n$ où $p_J(x)$ est le polynôme caractéristique de J.

(+1 point)

b) Cayley-Hamilton : $p_A(A) = 0$. Ainsi $(-1)^n A^n = 0$, alors A est nilpotente.

(+1 point)

Question 23 (6 points)

a) $i = 0 : v^{(0)} = [x^{(0)}]_B = (\alpha_1 \lambda_1^0, \ldots, \alpha_n \lambda_n^0)$.

$i > 0 : x^{(i+1)} = Ax^{(i)} = \sum_{j=1}^n A\, \alpha_j \lambda_j^i u_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^{i+1} u_j$.

Alors $v^{(i+1)} = (\alpha_1 \lambda_1^{i+1}, \ldots, \alpha_n \lambda_n^{i+1})$.

(+1 point)

b) $\frac{v_j^{(i)}}{v_k^{(i)}} = \frac{\alpha_j \lambda_j^i}{\alpha_k \lambda_k^i} = \frac{\alpha_j}{\alpha_k} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_k} \right)^i \longrightarrow 0$ pour $i \longrightarrow \infty$ parce que $0 < \frac{\lambda_j}{\lambda_k} < 1$.

(+1 point)

c) Soit $k = \min\{j \colon \alpha_j \neq 0\}$ et $j \neq k$.

b) implique

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{i\to\infty} \frac{v_j^{(i)}}{v_k^{(i)}} \\ &= \lim_{i\to\infty} \frac{v_j^{(i)}/\|v^{(i)}\|}{v_k^{(i)}/\|v^{(i)}\|} \end{aligned}$$

Mais $\left\| \frac{v^{(i)}}{\|v^{(i)}\|} \right\| = 1$ alors $\lim_{i\to\infty} \frac{|v^{(i)}|}{\|v^{(i)}\|} = e_k$.

(+1 point)

En haut, on peut utiliser le théorème suivant sans preuve (sera écrit sur tableau noir) : Soit $y^{(i)} \in S^{n-1}$, $i \in \mathbb{N}$ une suite et $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

i) $y_k^{(i)} \neq 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et

ii) $\lim_{i\to\infty} y_j^{(i)}/y_k^{(i)} = 0$ si $j \neq k$.

Alors $\lim_{i\to\infty} |y^{(i)}| = e_k$.

Parce que $\lambda_k > 0$, le signe de $\frac{|v_k^{(i)}|}{\|v^{(i)}\|}$ est celui de α_k.

Si $\alpha_k > 0$ alors $\lim_{i\to\infty} \frac{v^{(i)}}{\|v^{(i)}\|} = e_k$.

Si $\alpha_k < 0$ alors $\lim_{i\to\infty} \frac{v^{(i)}}{\|v^{(i)}\|} = -e_k$.

(+1 point)

d) B orthonormale implique $\|x^{(i)}\| = \|v^{(i)}\|$

Soit $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice $B = (u_1, \ldots, u_n)$.

$x^{(i)}/\|x^{(i)}\| = Bv^{(i)}/\|v^{(i)}\| \longrightarrow B(\pm e_k) = \pm u_k$

(+1 point)

e) $A = (-1) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ $x^{(0)} = 1$.

(+1 point)

Question 24 (6 points)

a) $m(v, v) \neq 0$ implique qu'il existe base orthogonale $v, b_1, \ldots, b_n$. Indice de positivité $= n$ implique $m(b_i, b_i) > 0$ pour $1 \leq i \leq n$.

$w \in v^\perp \setminus \{0\} \iff w \in \mathrm{span}(b_1, \ldots, b_n) \setminus \{0\}$.

(+1 point)

$w = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$ implique $m(w, w) = \sum_i m(b_i, b_i)\alpha_i^2 > 0$ si $w \neq 0$.

(+1 point)

b) Comme dans le point a) on choisit une base $v, b_1 \ldots, b_n$ de V et on laisse

$$w = \alpha_0 v + \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$$

$\alpha_i \in \mathbb{R}$.

$m(w, w) < 0$ si et seulement si

$$m(w, w) = \alpha_0^2 m(v, v) + \alpha_1^2 m(b_1, b_1) + \cdots + \alpha_n^2 m(b_n, b_n) < 0. \tag{1}$$

(+1 point)

$$\begin{array}{rcl} |m(v,w)|^2 & = & \alpha_0^2 (m(v,v))^2 \\ & = & |m(v,v)|\, \alpha_0^2 \cdot |m(v,v)| \\ & \geq & |m(v,v)|\, (\alpha_1^2 \cdot m(b_1,b_1) + \cdots + \alpha_n^2 \cdot m(b_n,b_n)) \\ & \geq & |m(v,v)|\, |m(w,w)|. \end{array}$$

Première inégalité suit par (1). Le deuxième parce que $\alpha_0^2\, m(v,v) \leq 0$.

(+1 point)

c) On calcule

$$\begin{aligned} -m(v+w,v+w) &= -m(v,v) - 2m(v,w) - m(w,w) \\ &= -m(v,v) + 2|m(v,w)| - m(w,w) \\ &\geq -m(v,v) + 2\sqrt{-m(v,v)}\sqrt{-m(w,w)} - m(w,w) \\ &= (\sqrt{-m(v,v)} + \sqrt{-m(w,w)})^2, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'hypothèse $m(v,w) < 0$ dans la deuxième égalité et l'inégalité du point b) dans la troisième étape. Ceci termine l'exercice.

(+2 point)

Question 25 (5 points)

$\Longrightarrow$ Supposons que A est diagonalisable. On peut donc poser $m = 1$.

(+1 point)

$\Longleftarrow$ Supposons A^m diagonalisable pour un $m \in \mathbb{N}^*$.

Théorème du cours : $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est diagonalisable $\iff$ $m_B(x)$ possède que des racines simples, où $m_B(x) \in \mathbb{C}[x]$ est le polynôme minimal de B.

Alors

$$m_{A^m}(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i),$$

où λ_i valeurs propres de A^m, $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$.

(+1 point)

Pour $f(x) := m_{A^m}(x^m)$ on a $f(A) = 0$. Alors $m_A(x)|f(x)$

(+1 point)

On a

$$f(x) = \prod_{i=1}^{k} (x^m - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{m} (x - \mu_{i,j}).$$

Supposons $\mu_{i,j} = \mu_{r,s}$. Dans ce cas, $\mu_{i,j}^m = \mu_{r,s}^m$ et donc $\lambda_i = \lambda_r$, ce qui implique $i = r$.

x ne divise pas $x^m - \lambda_i$ alors $\gcd(x^m - \lambda_i, mx^{m-1}) = 1$ implique $x^m - \lambda_i$ que de racines simples. ($\lambda_i \neq 0$ car A^m inversible). Alors $f(x)$ n'admet que des racines simples.

(+1 point)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est contre-exemple dans le cas A non inversible.

(+1 point)