Ens: Prof. Friedrich Eisenbrand
Algèbre Linéaire Avancée II - MA -
23 juin 2025
Durée: 210 minutes

SCIPER : Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 20 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  -1 point si des réponses incorrectes sont inscrites,
  0 point si il n'y a aucune réponse inscrite,
  $+2$ points autrement.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les **questions ouvertes**, utilisez la grille prévue à cet effet pour votre réponse. Chacune de ces grilles dispose d'une **version de réserve** dans la section correspondante. Nous ne prenons en compte qu'une seule grille. Si deux ont été utilisées, **barrez** celle qui n'est pas à évaluer. Toute **affirmation erronée** dans votre texte sera sanctionnée par un retrait d'un point.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren
☒ ☑ ■	☐	☐

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la/les case(s) correspondante(s) à la/aux réponse(s) correcte(s) sans faire de ratures.

Question [`MCQ-01`] Soient

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \cdot x^{304} + 2 \cdot x^{205} + x^{104} + 1 \quad \text{et} \\ g(x) &= (x^2 - 1)(x^2 - 2) \end{aligned}$$

deux polynômes de $\mathbb{Z}_5[x]$. On considère la division avec reste

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

où $r(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Quel est le coefficient a_2?

- ■ $a_2 = 0$
- □ $a_2 = 1$
- □ $a_2 = 2$
- □ $a_2 = 3$
- □ $a_2 = 4$

Question [`MCQ-02`] Quel est le polynôme caractéristique $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \in \mathbb{Q}[\lambda]$ de la matrice $A \in \mathbb{Q}^{5\times5}$?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 2 & 4 & 12 \\ 2 & 9 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

- □ $p_A(\lambda) = -\lambda^5 + 14\lambda^4 + 41\lambda^3 + 98\lambda^2 + 3\lambda + 231$
- ■ $p_A(\lambda) = -\lambda^5 + 14\lambda^4 + 41\lambda^3 + 298\lambda^2 + 312\lambda$
- □ $p_A(\lambda) = -\lambda^5 - 14\lambda^4 + 41\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda$
- □ Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question [`MCQ-03`] Soit $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Quel est l'exponentiel $e^{t\cdot A}$?

- [ ] $$e^{t\cdot A} = e^{i\cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t^3 & \frac{t^3}{2} & \frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & t^2 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- [ ] $$e^{t\cdot A} = e^{i\cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & t & t^2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- [x] $$e^{t\cdot A} = e^{i\cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- [ ] Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question [`MCQ-04`] Soit $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ une base der $\mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$ et $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Soit $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ la base de $\mathbb{R}^n$ ou $c_j = b_j$ pour $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, i+1\}$, $c_i = b_{i+1}$ et $c_{i+1} = b_i$.
Soit $b_1^*, \dots, b_n^*$ le résultat du procédé Gram-Schmidt sur $b_1, \dots, b_n$, i.e.

$$b_i^* = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ji} b_j^*, \quad \text{où } \mu_{ji} = \frac{\langle b_i, b_j^* \rangle}{\langle b_j^*, b_j^* \rangle}.$$

Soit $c_1^*, \dots, c_n^*$ le résultat du procédé Gram-Schmidt sur $c_1, \dots, c_n$. Quel est une formule correcte pour c_i^*?

- [ ] $c_i^* = b_{i+1}^* - \mu_{i,i+1} b_i^*$
- [x] $c_i^* = b_{i+1}^* + \mu_{i,i+1} b_i^*$
- [ ] $c_i^* = b_{i+1}^*$
- [ ] Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question [`MCQ-05`] Soient $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On écrit $D + N$ pour la forme normale de Jordan de la matrice A, où D est une matrice diagonale avec les valeurs propres de A sur la diagonale et N est une matrice nilpotente construite à partir des blocs de Jordan. Alors

- [ ] la forme normal de Jordan de la matrice cA est donnée par $c(D + N)$.
- [x] la forme normal de Jordan de la matrice cA est donnée par $cD + N$.
- [ ] la forme normal de Jordan de la matrice cA est donnée par $D + N$.
- [ ] Aucune des autres réponses n'est correcte.

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question [TF-01]
Les matrices rationnelles

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables sur $\mathbb{Q}$. C'est-à-dire il existe une matrice $P \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ inversible telle que

$$A = P^{-1} \cdot B \cdot P.$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-02] La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$$

est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [TF-03] Soit $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$. Alors A est nilpotente si et seulement si

$$e^{t\cdot A} \in \mathbb{Q}[t]^{n\times n}.$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-04] Deux matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sont semblables si et seulement si ils admettent la même forme normale de Jordan (à permutation de blocs près).

■ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-05] Soit $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ une base der $\mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard et soit $b_1^*, \ldots, b_n^*$ le résultat du procédé Gram-Schmidt sur $b_1, \ldots, b_n$.
Alors, $\|b_i^*\|$ est la distance de b_i au sous-espace $\operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n\}$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [TF-06] Soient $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Si 1 est valeur propre des matrices A et B, alors 1 est valeur propre de la matrice AB.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [TF-07] Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Les matrices A et A^T ont les mêmes valeurs propres avec même multiplicité algébrique et geométrique.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-08] Soient $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Si les matrices A et B sont semblables, alors ils ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [TF-09] Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n} \setminus \{0\}$. Supposons que les polynômes $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$ sont de degré minimal annulant A. Alors, on a $f(x) = g(x)$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [TF-10] Soient $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Si les matrices A et B ont le même polynôme minimal et les mêmes valeurs propres, avec multiplicités algébrique et géométrique égales, alors A et B ont la même forme normale de Jordan (à permutation de blocs près).

☐ VRAI ■ FAUX

Question [TF-11] Soit R un anneau. Alors, on a

$$Z(R^{n\times n}) = \{r \cdot I_n \,|\, r \in R\}.$$

Rappel: $Z(R^{n\times n})$ est le *centre* de $R^{n\times n}$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [TF-12]
Les matrices rationnelles

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont congruentes sur $\mathbb{Q}$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [TF-13] Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ des matrices symétriques. Si les matrices A et B sont semblables, alors elles sont congruentes.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-14] Soit V un espace vectoriel de dimension fini sur un corps K de caractéristique $\mathrm{char}(K) = 2$ muni d'une une forme bilinéaire symétrique $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit $H \neq \{0\}$ un sous-espace de V et $b_1, \ldots, b_k$ une base orthogonale de H vérifiant $\langle b_i, b_i\rangle \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$. Pour $v \in V$ il existe un $u \in H$ unique tel que

$$\langle v - u, h\rangle = 0 \text{ pour tout } h \in H.$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-15]
Soit V un espace vectoriel sur K de dimension fini, $N : V \to V$ un endomorphisme nilpotent et $x \in V \setminus \{0\}$ et $i \in \mathbb{N}$ tel que $N^i(x) \neq 0$. Les vecteurs

$$x, N(x), \ldots, N^i(x) \in V$$

sont linéairement indépendant.

■ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans la grille prévue à cet effet pour votre réponse. Chacune de ces grilles dispose d'une version de réserve dans la section correspondante. Nous ne prenons en compte qu'une seule grille. Si deux ont été utilisées, **barrez** celle qui ne doit pas être évaluée. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 21: *Cette question est notée sur 3 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ■ 3

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de A. Montrer que

$$\lambda_1 \geq a_{ii} \geq \lambda_n \quad \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Grille de réserve. Voir la description sur la première page de l'examen pour son usage.

Question 22: *Cette question est notée sur 3 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ■ 3

Soit $A \in K^{n\times n} \setminus \{0\}$ où K est un corps et $p_A(x)$ le polynôme caractéristique de A.

a) Si A est nilpotente, montrer que $p_A(x) = (-1)^n x^n$.

b) Si $p_A(x) = (-1)^n x^n$, montrer que A est nilpotente.

Grille de réserve. Voir la description sur la première page de l'examen pour son usage.

a)

b)

Question 23: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ■ 7

Dans cet exercice, on considère le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$ et la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée.

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique et $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\} \in \mathbb{R}^n$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ composée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0 \in \mathbb{R}$. Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $i \in \mathbb{N}_0$, on définit la suite $x^{(i)}$ récursivement comme

$$x^{(i+1)} = Ax^{(i)}.$$

Soit $[x^{(0)}]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$. On dénote $[x^{(i)}]_{\mathcal{B}}$ par $v^{(i)} = [x^{(i)}]_{\mathcal{B}}$.

(a) Montrer par récurrence que

$$v^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1\lambda_1^i \\ \vdots \\ \alpha_n\lambda_n^i \end{pmatrix}$$

(b) Si $\alpha_k \neq 0$ et $j > k$, montrer que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{v_j^{(i)}}{v_k^{(i)}} = 0.$$

(c) Montrer qu'il existe un index $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{v^{(i)}}{\|v^{(i)}\|} = e_k \quad \text{ou} \quad \lim_{i\to\infty} \frac{v^{(i)}}{\|v^{(i)}\|} = -e_k.$$

(d) Montrer que $x^{(i)}/\|x^{(i)}\|$ converge vers un vecteur propre de A.

(e) Donner un exemple d'une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et d'un $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pour lequel $x^{(i)}/\|x^{(i)}\|$ ne converge pas, si $\lambda_n < 0$.

Grille de réserve. Voir la description sur la première page de l'examen pour son usage.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

Question 24: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Soit V un espace vectoriel réel de dimension $(n+1)$ et $m : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique d'indice de positivité n et d'indice de négativité 1.

a) Soit $v \in V$ un vecteur satisfaisant $m(v,v) < 0$. Montrer que pour tout vecteur $w \in v^{\perp} \setminus \{0\}$ (c'est-à-dire $m(v,w) = 0$) on a $m(w,w) > 0$.

b) Montrer que pour $v, w \in V$ tels que $m(v,v) < 0$ et $m(w,w) < 0$ on a

$$|m(v,w)| \geq \sqrt{-m(v,v)}\sqrt{-m(w,w)}.$$

c) Montrer que pour $v, w \in V$ tels que $m(v,v) < 0$, $m(w,w) < 0$ et $m(v,w) < 0$ on a

$$\sqrt{-m(v+w, v+w)} \geq \sqrt{-m(v,v)} + \sqrt{-m(w,w)}.$$

Grille de réserve. Voir la description sur la première page de l'examen pour son usage.

a)

b)

c)

Question 25: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ■ 5

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^m est diagonalisable pour un certain $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Donner un contre-exemple lorsque A n'est pas inversible.

Grille de réserve. Voir la description sur la première page de l'examen pour son usage.