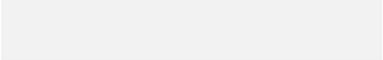




Ens: Prof. Friedrich Eisenbrand  
 Algèbre Linéaire Avancée II - MA -  
 23 juin 2025  
 Durée: 210 minutes

SCIPER:

Signature: 

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 20 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - 1 point si des réponses incorrectes sont inscrites,
  - 0 point si il n'y a aucune réponse inscrite,
  - +2 points autrement.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - +1 point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les **questions ouvertes**, utilisez la grille prévue à cet effet pour votre réponse. Chacune de ces grilles dispose d'une **version de réserve** dans la section correspondante. Nous ne prenons en compte qu'une seule grille. Si deux ont été utilisées, **barrez** celle qui n'est pas à évaluer. Toute **affirmation erronée** dans votre texte sera sanctionnée par un retrait d'un point.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes   Observe this guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse   select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse   Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte		
     		

**Première partie, questions à choix multiple**

Pour chaque question marquer la/les case(s) correspondante(s) à la/aux réponse(s) correcte(s) sans faire de ratures.

**Question [MCQ-01]** Soient

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \cdot x^{304} + 2 \cdot x^{205} + x^{104} + 1 \quad \text{et} \\ g(x) &= (x^2 - 1)(x^2 - 2) \end{aligned}$$

deux polynômes de  $\mathbb{Z}_5[x]$ . On considère la division avec reste

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

où  $r(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}_5[x]$ . Quel est le coefficient  $a_2$ ?

- $a_2 = 0$   
  $a_2 = 1$   
  $a_2 = 2$   
  $a_2 = 3$   
  $a_2 = 4$

**Question [MCQ-02]** Quel est le polynôme caractéristique  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \in \mathbb{Q}[\lambda]$  de la matrice  $A \in \mathbb{Q}^{5 \times 5}$ ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 2 & 4 & 12 \\ 2 & 9 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

- $p_A(\lambda) = -\lambda^5 + 14\lambda^4 + 41\lambda^3 + 98\lambda^2 + 3\lambda + 231$   
  $p_A(\lambda) = -\lambda^5 + 14\lambda^4 + 41\lambda^3 + 298\lambda^2 + 312\lambda$   
  $p_A(\lambda) = -\lambda^5 - 14\lambda^4 + 41\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda$   
 Aucune des autres réponses n'est correcte.

CATALOGUE

**Question [MCQ-03]** Soit  $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Quel est l'exponentiel  $e^{t \cdot A}$ ?

$$e^{t \cdot A} = e^{i \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t^3 & \frac{t^3}{2} & \frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & t^2 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{t \cdot A} = e^{i \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & t & t^2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{t \cdot A} = e^{i \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aucune des autres réponses n'est correcte.

**Question [MCQ-04]** Soit  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  une base de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire standard de  $\mathbb{R}^n$  et  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Soit  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  la base de  $\mathbb{R}^n$  ou  $c_j = b_j$  pour  $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, i+1\}$ ,  $c_i = b_{i+1}$  et  $c_{i+1} = b_i$ .

Soit  $b_1^*, \dots, b_n^*$  le résultat du procédé Gram-Schmidt sur  $b_1, \dots, b_n$ , i.e.

$$b_i^* = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ji} b_j^*, \quad \text{où } \mu_{ji} = \frac{\langle b_i, b_j^* \rangle}{\langle b_j^*, b_j^* \rangle}.$$

Soit  $c_1^*, \dots, c_n^*$  le résultat du procédé Gram-Schmidt sur  $c_1, \dots, c_n$ . Quel est une formule correcte pour  $c_i^*$ ?

$c_i^* = b_{i+1}^* - \mu_{i,i+1} b_i^*$

$c_i^* = b_{i+1}^* + \mu_{i,i+1} b_i^*$

$c_i^* = b_{i+1}^*$

Aucune des autres réponses n'est correcte.

**Question [MCQ-05]** Soient  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . On écrit  $D + N$  pour la forme normale de Jordan de la matrice  $A$ , où  $D$  est une matrice diagonale avec les valeurs propres de  $A$  sur la diagonale et  $N$  est une matrice nilpotente construite à partir des blocs de Jordan. Alors

la forme normal de Jordan de la matrice  $cA$  est donnée par  $c(D + N)$ .

la forme normal de Jordan de la matrice  $cA$  est donnée par  $cD + N$ .

la forme normal de Jordan de la matrice  $cA$  est donnée par  $D + N$ .

Aucune des autres réponses n'est correcte.

## Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question [TF-01]**

Les matrices rationnelles

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables sur  $\mathbb{Q}$ . C'est-à-dire il existe une matrice  $P \in \mathbb{Q}^{5 \times 5}$  inversible telle que

$$A = P^{-1} \cdot B \cdot P.$$

VRAI       FAUX

**Question [TF-02]** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5 \times 5}$$

est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

VRAI       FAUX

**Question [TF-03]** Soit  $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ . Alors  $A$  est nilpotente si et seulement si

$$e^{t \cdot A} \in \mathbb{Q}[t]^{n \times n}.$$

VRAI       FAUX

**Question [TF-04]** Deux matrices  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sont semblables si et seulement si ils admettent la même forme normale de Jordan (à permutation de blocs près).

VRAI       FAUX

**Question [TF-05]** Soit  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  une base de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire standard et soit  $b_1^*, \dots, b_n^*$  le résultat du procédé Gram-Schmidt sur  $b_1, \dots, b_n$ . Alors,  $\|b_i^*\|$  est la distance de  $b_i$  au sous-espace  $\text{span}\{b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n\}$ .

VRAI       FAUX

**Question [TF-06]** Soient  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Si 1 est valeur propre des matrices  $A$  et  $B$ , alors 1 est valeur propre de la matrice  $AB$ .

VRAI       FAUX

**Question [TF-07]** Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Les matrices  $A$  et  $A^T$  ont les mêmes valeurs propres avec même multiplicité algébrique et géométrique.

VRAI       FAUX

CATALOGUE

**Question [TF-08]** Soient  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Si les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables, alors ils ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres.

VRAI       FAUX

**Question [TF-09]** Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n} \setminus \{0\}$ . Supposons que les polynômes  $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$  sont de degré minimal annulant  $A$ . Alors, on a  $f(x) = g(x)$ .

VRAI       FAUX

**Question [TF-10]** Soient  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Si les matrices  $A$  et  $B$  ont le même polynôme minimal et les mêmes valeurs propres, avec multiplicités algébrique et géométrique égales, alors  $A$  et  $B$  ont la même forme normale de Jordan (à permutation de blocs près).

VRAI       FAUX

**Question [TF-11]** Soit  $R$  un anneau. Alors, on a

$$Z(R^{n \times n}) = \{r \cdot I_n \mid r \in R\}.$$

*Rappel:  $Z(R^{n \times n})$  est le centre de  $R^{n \times n}$ .*

VRAI       FAUX

**Question [TF-12]**

Les matrices rationnelles

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont congruentes sur  $\mathbb{Q}$ .

VRAI       FAUX

**Question [TF-13]** Soient  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  des matrices symétriques. Si les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables, alors elles sont congruentes.

VRAI       FAUX

**Question [TF-14]** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension fini sur un corps  $K$  de caractéristique  $\text{char}(K) = 2$  muni d'une forme bilinéaire symétrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soit  $H \neq \{0\}$  un sous-espace de  $V$  et  $b_1, \dots, b_k$  une base orthogonale de  $H$  vérifiant  $\langle b_i, b_i \rangle \neq 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Pour  $v \in V$  il existe un  $u \in H$  unique tel que

$$\langle v - u, h \rangle = 0 \quad \text{pour tout } h \in H.$$

VRAI       FAUX

**Question [TF-15]**

Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $K$  de dimension fini,  $N : V \rightarrow V$  un endomorphisme nilpotent et  $x \in V \setminus \{0\}$  et  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $N^i(x) \neq 0$ . Les vecteurs

$$x, N(x), \dots, N^i(x) \in V$$

sont linéairement indépendants.

VRAI       FAUX









CATALOGUE

**Question 23:** Cette question est notée sur 7 points.

0  1  2  3  4  5  6  7

Dans cet exercice, on considère le produit scalaire standard de  $\mathbb{R}^n$  et la norme euclidienne  $\|\cdot\|$  associée.

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique et  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\} \in \mathbb{R}^n$  une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$  composée de vecteurs propres de  $A$  associés aux valeurs propres  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0 \in \mathbb{R}$ . Soit  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Pour  $i \in \mathbb{N}_0$ , on définit la suite  $x^{(i)}$  récursivement comme

$$x^{(i+1)} = Ax^{(i)}.$$

Soit  $[x^{(0)}]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . On dénote  $[x^{(i)}]_{\mathcal{B}}$  par  $v^{(i)} = [x^{(i)}]_{\mathcal{B}}$ .

(a) Montrer par récurrence que

$$v^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda_1^i \\ \vdots \\ \alpha_n \lambda_n^i \end{pmatrix}$$

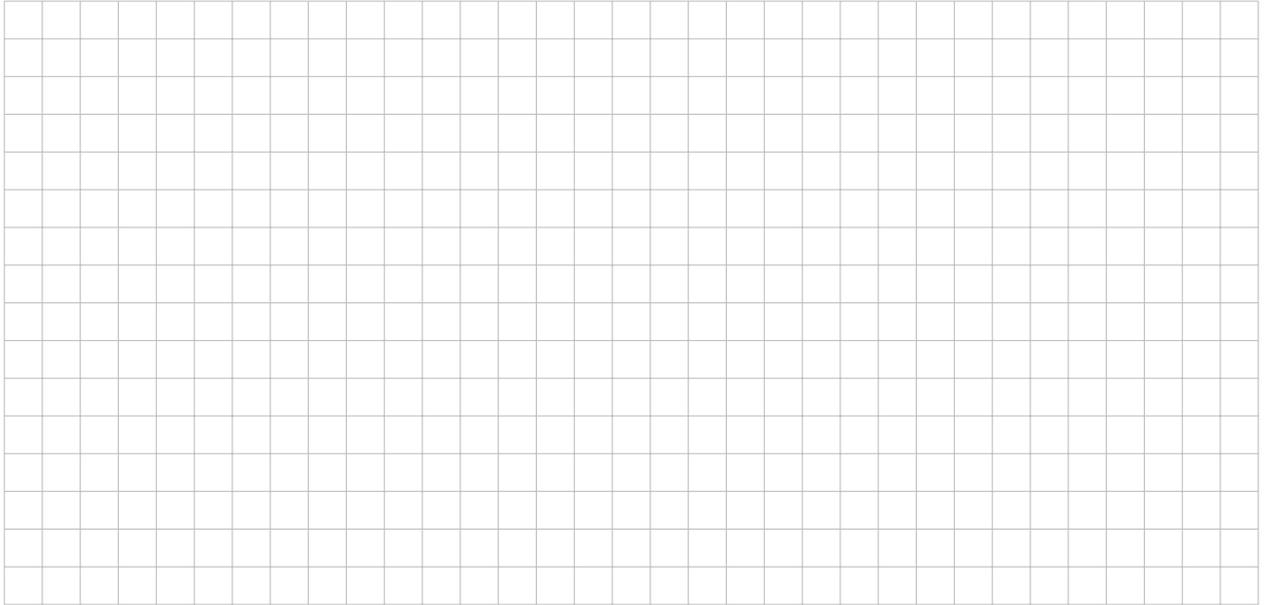
(b) Si  $\alpha_k \neq 0$  et  $j > k$ , montrer que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{v_j^{(i)}}{v_k^{(i)}} = 0.$$

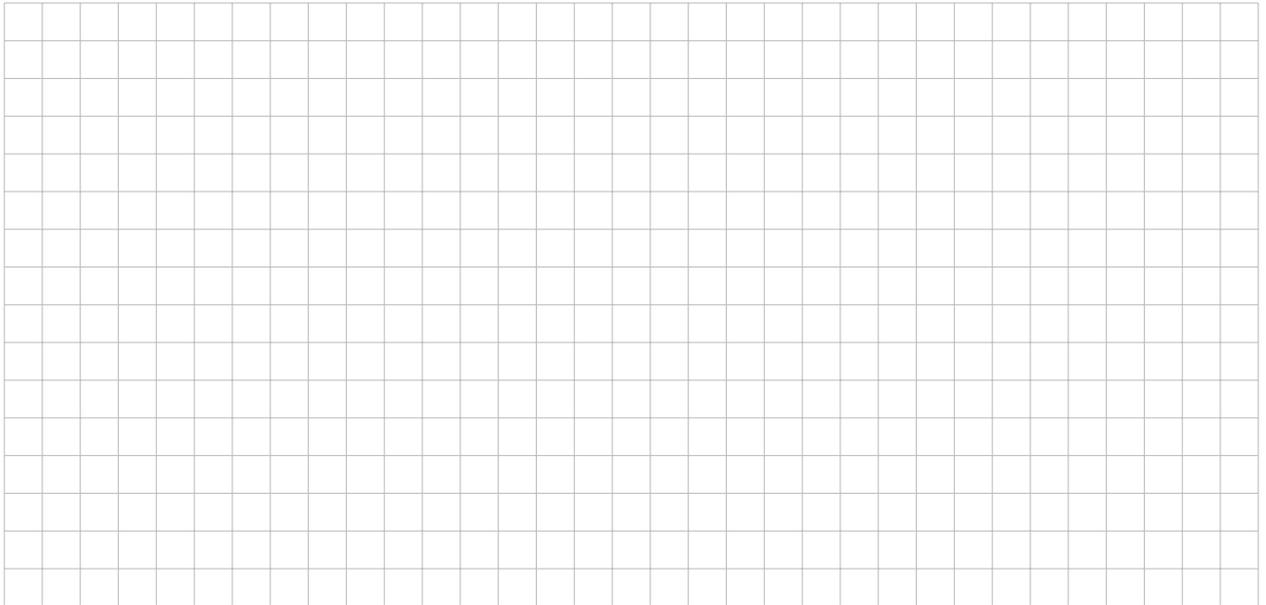
CATALOGUE

(c) Montrer qu'il existe un index  $k \in \{1, \dots, n\}$  tel que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{v^{(i)}}{\|v^{(i)}\|} = e_k \quad \text{ou} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{v^{(i)}}{\|v^{(i)}\|} = -e_k.$$



(d) Montrer que  $x^{(i)} / \|x^{(i)}\|$  converge vers un vecteur propre de  $A$ .



(e) Donner un exemple d'une matrice symétrique  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et d'un  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  pour lequel  $x^{(i)} / \|x^{(i)}\|$  ne converge pas, si  $\lambda_n < 0$ .



## CATALOGUE

Grille de réserve. Voir la description sur la première page de l'examen pour son usage.

(a)



(b)





CATALOGUE

**Question 24:** Cette question est notée sur 6 points.

0  1  2  3  4  5  6

Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension  $(n + 1)$  et  $m : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire symétrique d'indice de positivité  $n$  et d'indice de négativité 1.

- a) Soit  $v \in V$  un vecteur satisfaisant  $m(v, v) < 0$ . Montrer que pour tout vecteur  $w \in v^\perp \setminus \{0\}$  (c'est-à-dire  $m(v, w) = 0$ ) on a  $m(w, w) > 0$ .

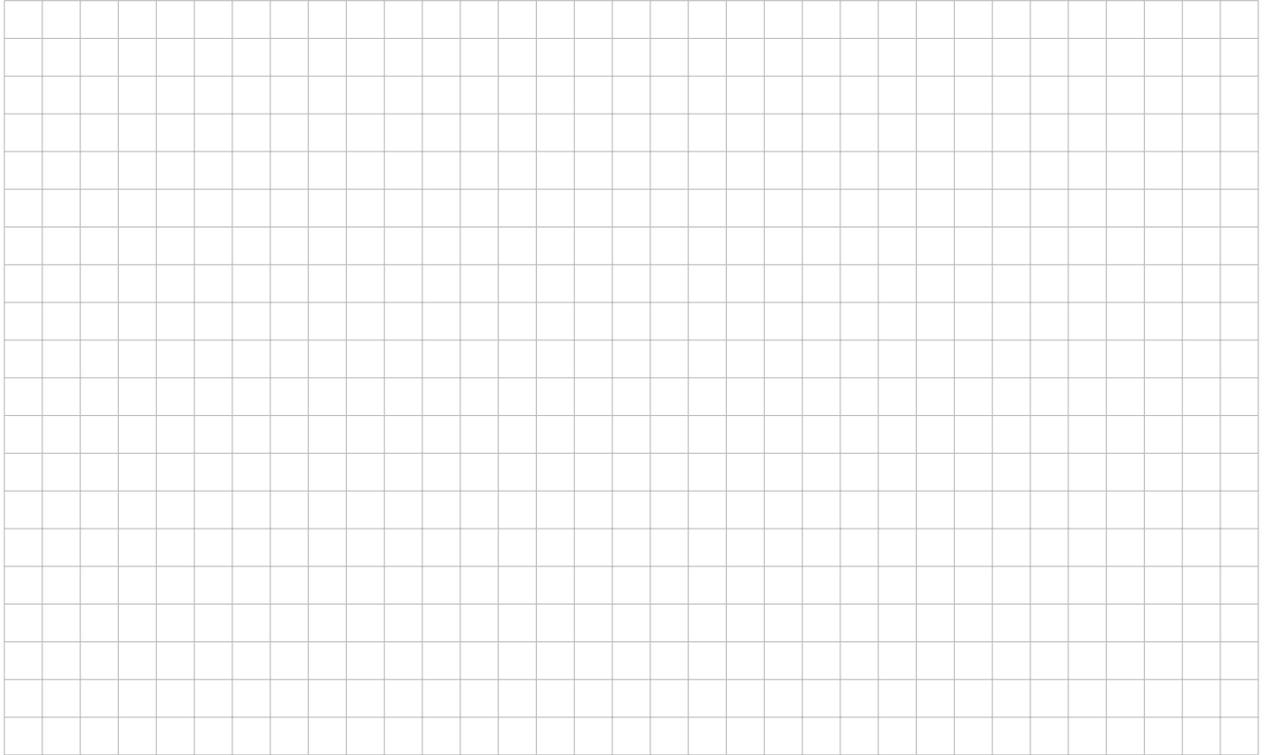
- b) Montrer que pour  $v, w \in V$  tels que  $m(v, v) < 0$  et  $m(w, w) < 0$  on a

$$|m(v, w)| \geq \sqrt{-m(v, v)} \sqrt{-m(w, w)}.$$

CATALOGUE

c) Montrer que pour  $v, w \in V$  tels que  $m(v, v) < 0$ ,  $m(w, w) < 0$  et  $m(v, w) < 0$  on a

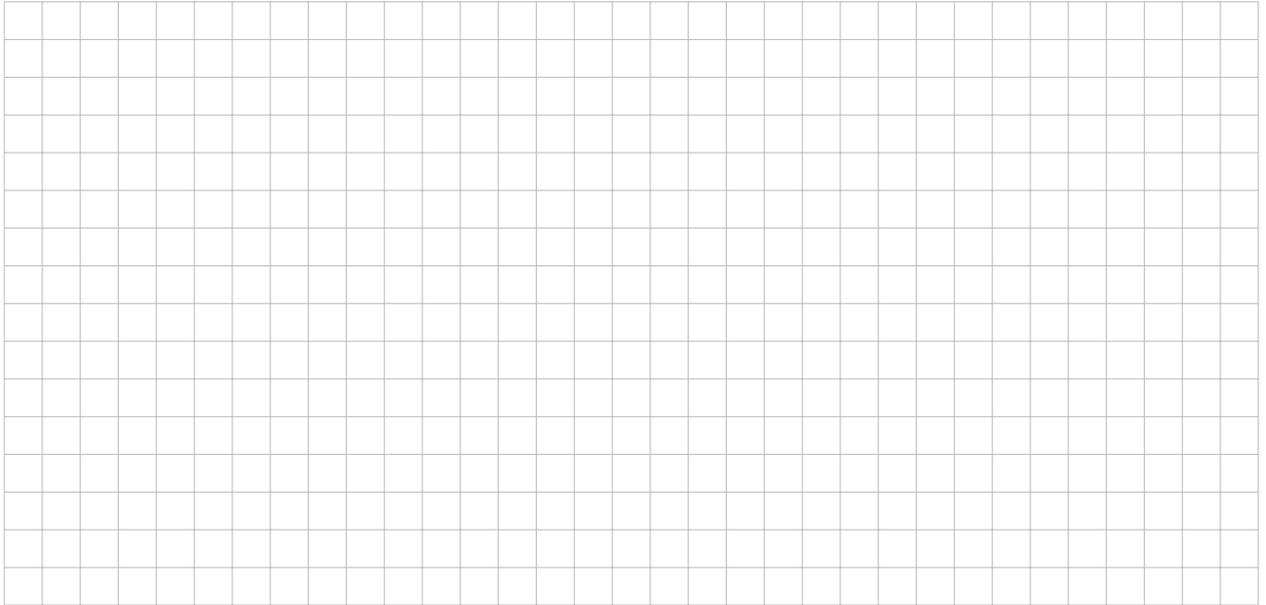
$$\sqrt{-m(v+w, v+w)} \geq \sqrt{-m(v, v)} + \sqrt{-m(w, w)}.$$



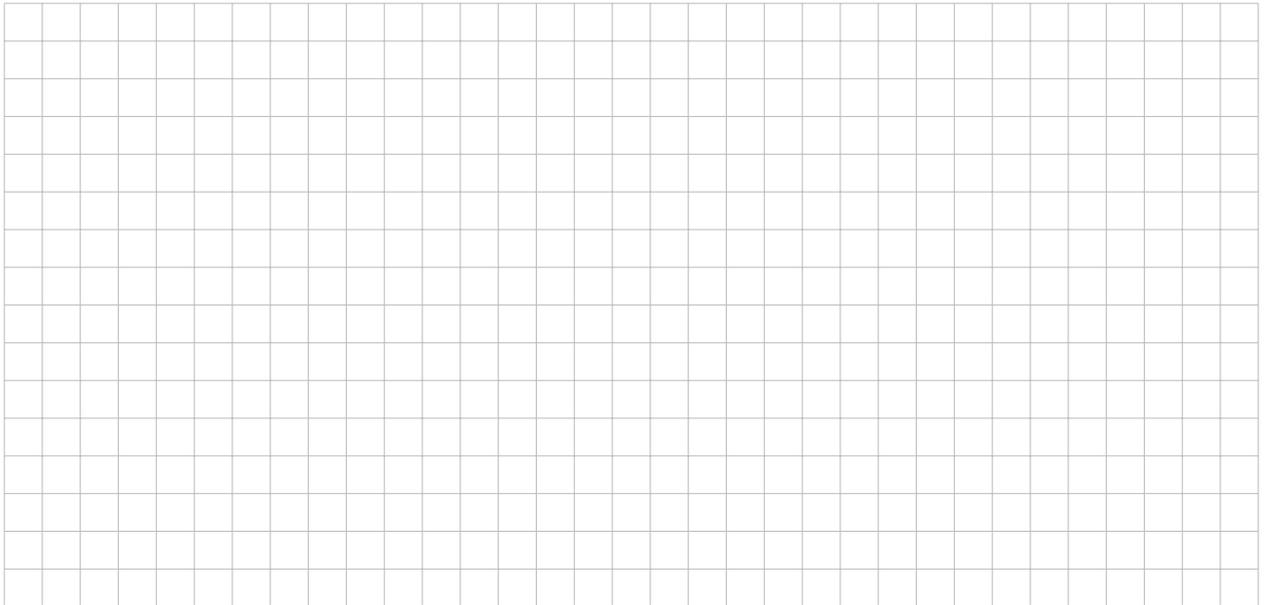
## CATALOGUE

Grille de réserve. Voir la description sur la première page de l'examen pour son usage.

a)



b)





CATALOGUE

**Question 25:** *Cette question est notée sur 5 points.*

0  1  2  3  4  5

Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  inversible. Montrer que  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $A^m$  est diagonalisable pour un certain  $m \in \mathbb{N}_{>0}$ . Donner un contre-exemple lorsque  $A$  n'est pas inversible.





## CATALOGUE