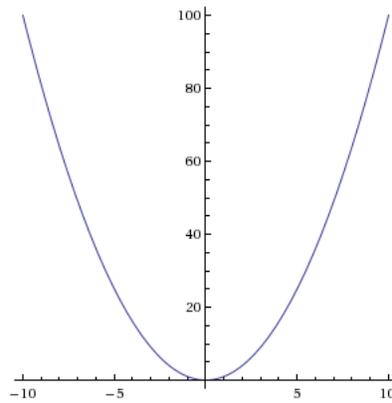


Corrigé série 30

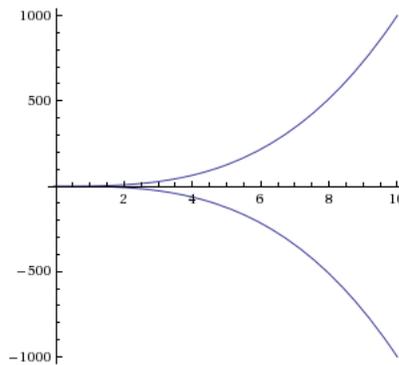
Exercice 1. (8 points)

Dans chaque partie, on utilise le fait qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continue si et seulement si les deux composantes sont continues.

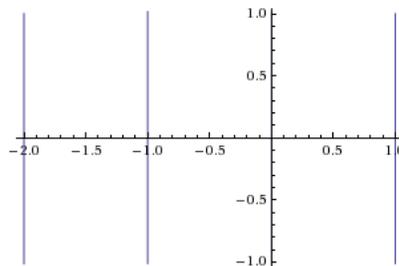
a) Oui, $f(t) = (t, t^2)$ est continue.



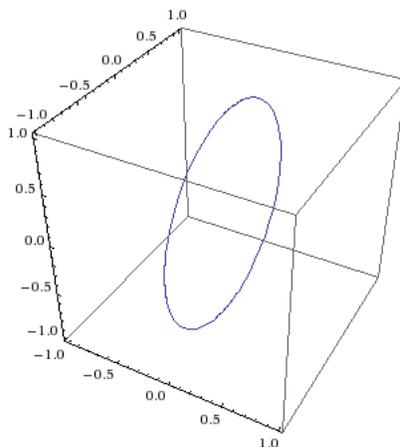
b) Oui, $f(t) = (|t|, t^3)$ est continue.



c) Non, $f(t) = (\lfloor \frac{t}{2\pi} \rfloor, \cos t)$ n'est pas continue, comme la première composante ne l'est pas.



- d) Oui, $f(t) = (\lfloor \frac{t}{2\pi} \rfloor, \cos t, \sin t)$ est continue sur son domaine $[0, 2\pi)$. En effet, la première composante vaut 0 identiquement, et $\cos t$ et $\sin t$ sont aussi continues.



Exercice 2. (2 + 4 = 6 points)

- a) La fonction $f(t) = (t + 1, 2t + 2, 3t + 3)$ satisfait les conditions.
 b) La fonction $f(t) = (t \cos 2\pi t, t \sin 2\pi t, t)$ satisfait les conditions.

Exercice 3. (10 points)

- a) Non, $g_t(\vec{x}) = \vec{x} + (1 + t)\vec{x}$ n'est pas un mouvement, comme g_0 n'est pas l'identité.
 b) Oui, il est clair que $g_t(\vec{x}) = \vec{x}$ est un mouvement.
 c) Non, si $t > 0$, $g_t(x) = \vec{x} - t\vec{x}$ ne préserve pas la distance entre deux vecteurs, i.e., $d(g_t(\vec{x}), g_t(\vec{y}))$ ne vaut pas toujours $d(\vec{x}, \vec{y})$, où $d(\cdot, \cdot)$ est la métrique euclidienne.
 d) Non, de même que ci-dessus, $g_t = \vec{x} + t\vec{x}$ n'est pas un mouvement.
 e) Non. Par exemple si

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors $g_t(\vec{x}) := (I_3 + t(A - I_3))\vec{x}$ n'est pas une isométrie $\forall t \in [0, 1]$, par exemple pas si $t = \frac{1}{2}$.

Exercice 4. (2 + 4 = 6 points)

- a) Pour tout $t \in [0, 1]$, on écrit

$$A_t := \begin{pmatrix} \cos \pi t & \sin \pi t \\ -\sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix}.$$

Alors, le mouvement qui emmène $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ sur le vecteur $-\vec{x}$ par rotation est $g_t(\vec{x}) = A_t\vec{x}$.

- b) Posons α l'angle entre \vec{u} et \vec{v} dans le plan créé par ces deux vecteurs. On peut par exemple commencer par faire une symétrie axiale d'axe \vec{u} , qui laisse fixe \vec{u} mais qui envoie \vec{x} sur $-\vec{x}$ et \vec{v} de "l'autre côté" de \vec{u} , avec le même angle α . On fait ensuite une rotation d'angle \vec{x} et d'angle α pour obtenir le résultat.

Exercice 5. (15 points (a, d, g donne 1 point, chaque autre item donne 2 points))

- a) **Vrai.** Voir la définition de continuité pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$.
 b) **Vrai.** Il y a beaucoup d'exemples. Un tel exemple est le mouvement

$$g_t(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos(\pi f(t)) & \sin(\pi f(t)) \\ -\sin(\pi f(t)) & \cos(\pi f(t)) \end{pmatrix} \vec{x}.$$

où $f(t) = e^{t(t-\frac{1}{2})} - 1$.

- c) **Faux.** Un mouvement est constitué d'isométries directes.
 d) **Vrai.** Soit $\vec{v} = (1, 1)$. Alors un tel mouvement est

$$g_t(\vec{x}) = \vec{x} + (t^2 - t)\vec{v}.$$

- e) **Faux** dès lors que $b \neq 0$ et **Vrai** si $b = 0$.

De fait, toutes les applications bilinéaires $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont de la forme $f(x, y) = axy$.

- f) **Vrai.** On sait que

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta,$$

où θ est l'angle entre \vec{u} et \vec{v} . Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, on a $\sin \theta = 1$, et $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est maximisé.

- g) **Faux.** Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $(\vec{u} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{0}$, mais

$$\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\vec{v} \neq \vec{0}.$$

- h) **Vrai.** Par anti-commutativité, on voit que

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u}) = \vec{u} \wedge [-(\vec{u} \wedge \vec{v})] = -(-(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}.$$

- i) **Faux.** Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} comme dans la partie g) ci-dessus donne un contre-exemple.

Exercice 6. (4 points)

Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\vec{u}^t A \vec{v} = au_1v_1 + bu_1v_2 + cu_2v_1 + du_2v_2.$$

Dans cette forme, il est facile de voir que $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u}^t A \vec{v}$ est bilinéaire.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}^t A \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Exercice 7.)

L'équation $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$ est équivalente à $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 5$.

Donc, le centre du cercle $C = (4, -1)$, et son rayon vaut $\sqrt{5}$.

Ainsi, la polaire p de $P = (9, 4)$ relativement à Γ a pour équation

$$(9 - 4)(x - 4) + (4 + 1)(y + 1) - 5 = 0 \Leftrightarrow 5x + 5y - 20 = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$$

On calcule les points d'intersection de Γ et p par substitution :

$$y = 4 - x \text{ dans } \Gamma \Rightarrow (x - 4)^2 + (4 - x + 1)^2 = 5 \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (x - 5)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 18x + 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 6) = 0$$

Ainsi, $x = 3$ et $y = 1$ d'où $S = (3, 1)$ ou alors $x = 6$ et $y = -2$ d'où $T = (6, -2)$.

Les tangentes au cercle passant par P sont $(PS) : y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ et $(PT) : y = 2x - 14$.

Exercices théoriques

Exercice 8. (3 + 3 + 2 = 8 points)

a) Soit $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ un vecteur dans \mathbb{R}^3 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, il est trivial de voir que, pour un $\vec{y}_0 = (y_1, y_2, y_3)$ fixé, l'application

$$\vec{x} \mapsto \langle \lambda \vec{x} + \vec{z}, \vec{y}_0 \rangle = (\lambda x_1 + z_1)y_1 + (\lambda x_2 + z_2)y_2 + (\lambda x_3 + z_3)y_3$$

est linéaire. De même, si on fixe $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, l'application

$$\vec{y} \mapsto \langle \vec{x}_0, \lambda \vec{y} + \vec{z} \rangle$$

est linéaire.

b) Une rotation ρ préserve la distance de tout vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, donc

$$\|\rho(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|,$$

où $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ est la norme euclidienne. La clé est d'observer que l'on peut écrire le produit scalaire comme un somme des carrés des distances. En fait, pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, on a que

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{2} (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2),$$

ce qui implique que

$$\langle \rho(\vec{x}), \rho(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

c) Non, il y a plusieurs d'applications bilinéaires $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Un exemple d'application est

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 \cdot y_1, \quad \text{et plus généralement} \quad f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j$$

où $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ et $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. (12 points)

a) Soient $\vec{u} = \lambda \vec{e}_1$, $\vec{v} = \mu \vec{e}_2$, et $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Alors,

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \lambda \mu \vec{e}_3 \wedge \vec{w} = (-\lambda \mu w_2) \vec{e}_1 + (\lambda \mu w_1) \vec{e}_2.$$

Par ailleurs,

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u} = (\lambda w_1) \vec{v} - (\mu w_2) \vec{u} = (\lambda \mu w_1) \vec{e}_2 - (\lambda \mu w_2) \vec{e}_1.$$

Les deux expressions sont bien égales.

b) Si \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux, alors il existe une rotation $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui emmène \vec{u} sur $\lambda \vec{e}_1$ et \vec{v} sur $\mu \vec{e}_2$, où λ (respectivement, μ) est la longueur de \vec{u} (respectivement, \vec{v}). Mais, comme conséquence du Théorème 2.4 des notes "Le Produit Vectoriel" et en utilisant la première partie, on trouve que

$$\begin{aligned} \rho((\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}) &= (\rho(\vec{u}) \wedge \rho(\vec{v})) \wedge \rho(\vec{w}) \\ &= \langle \rho(\vec{u}), \rho(\vec{w}) \rangle \rho(\vec{v}) - \langle \rho(\vec{v}), \rho(\vec{w}) \rangle \rho(\vec{u}) \\ &= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \rho(\vec{v}) - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \rho(\vec{u}) \\ &= \rho(\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u}). \end{aligned}$$

Donc, par injectivité de la rotation ρ , on voit que

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u}.$$

c) En général, pour tous \vec{u}, \vec{v} , on peut décomposer \vec{v} comme

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,$$

où \vec{v}_1 est orthogonal à \vec{u} et \vec{v}_2 est parallèle à \vec{u} . En fait, \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont uniques et on a

$$\vec{v}_2 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \text{ et } \vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{v}_2.$$

Posons $\vec{v}_2 = \lambda \vec{u}$ (c'est possible comme \vec{v}_2 est parallèle à \vec{u}). En utilisant la bilinéarité du produit vectoriel et du produit scalaire et le fait que $\langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle = 0$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}_2 = \vec{0}$, on trouve que

$$\begin{aligned} (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} &= (\vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)) \wedge \vec{w} \\ &= (\vec{u} \wedge \vec{v}_1) \wedge \vec{w} + (\vec{u} \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{w} \\ &= (\vec{u} \wedge \vec{v}_1) \wedge \vec{w} \\ &= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v}_1 - \langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle \vec{u} \\ &= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v}_1 - \langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle \vec{u} + \lambda \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{u} - \lambda \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{u} \\ &= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v}_1 - \langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle \vec{u} + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{w} \rangle \vec{u} \\ &= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u}. \end{aligned}$$

Exercice 10.

a) **Faux.** Considère le cas où $a = b = 0$ et $c = 1$. Alors, l'équation

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

n'a pas de solution.

Cependant, lorsque $c < \frac{a^2 + b^2}{4}$, cette équation décrit un cercle (non-dégénéré). (Pourquoi?)

b) **Vrai.** C'est facile de voir par la formule vectorielle de la puissance d'un point P .

c) **Faux.** Le centre du cercle est sur cette droite, mais le centre du cercle ne peut jamais être dans la polaire d'un point par rapport au cercle (voyez-vous pourquoi?).

d) **Vrai.** Soit C le centre du cercle donné. Comme le "segment" CC a longueur 0, on a que

$$\overrightarrow{CC} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \neq r^2$$

lorsque $r > 0$, donc le cercle est non-dégénéré.

Exercice 11.

a) Soit Γ le cercle donné de centre C . Soit p une droite ne passant pas par C . Soit M l'unique point sur p de distance minimale à C . On sait par une proposition du cours que si P est un point tel que p est sa polaire par rapport à Γ , alors P appartient à la droite CM . De plus, il est clair qu'il existe un unique point P sur CM qui satisfait l'équation $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CP} = |CM| \cdot |CP| = r^2$. Ce point P a pour polaire p .

b) Soient a une des droites de pôle A et b l'autre droite de pôle B , et suppose que a et b se croisent en P . Alors, on a

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2 \text{ et } \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2.$$

Cela implique que A et B se trouvent sur la polaire p de P . Comme p est une droite, on a que p est la droite passant par A et B .

c) Soit ℓ une droite passant par les points A et B et soit P le pôle de ℓ . Alors, on a

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2 \text{ et } \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2.$$

Alors, P se trouve dans l'intersection des polaires des points A et B .

d) Le cercle $c(C, r)$ et le point A situé à l'intérieur du cercle et différent de C sont donnés.

Marche à suivre pour construire la polaire de A par rapport au cercle c :

- Construire la perpendiculaire à AC passant par A . Cette droite coupe le cercle c en B et D .
- Construire les deux tangentes au cercle en B et D . Elles se coupent en E et $E \in (AC)$.
- Construire la perpendiculaire à AC passant par E .

Cette droite est la polaire de A par rapport au cercle.

