

**Exercice 1.**

- a) On calcule par exemple  $\mathcal{A} = |\det(\vec{a}; \vec{b})| = |-14| = 14$ ;  
 b) Par exemple,  $\mathcal{A} = |\det(\vec{a}; \vec{b})| = 12$ ;  
 c) Ici, l'aire vaut  $\mathcal{A} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \sqrt{29 \cdot 26 - ((-15) + (-4))^2} = \sqrt{393}$ .

**Exercice 2.**

- a) Avec par exemple  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ , on calcule l'aire  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot |\det(\vec{AB}; \vec{AC})| = \frac{1}{2} \cdot |-24 - 12| = 18$ .

Pour la longueur  $h_B$  de la hauteur issue de  $B$ , on utilise  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{AC}\| \cdot h_B$  pour trouver

$$h_B = \frac{2\mathcal{A}}{\|\vec{AC}\|} = \frac{2 \cdot 18}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = \frac{36}{2\sqrt{13}} = \frac{18}{\sqrt{13}}$$

- b) Après avoir vérifié sur une esquisse que le quadrilatère est bien convexe (voir question c) !), on partage  $ABCD$  en deux triangles, par exemple  $ABC$  et  $ACD$ . Avec  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ , on calcule l'aire

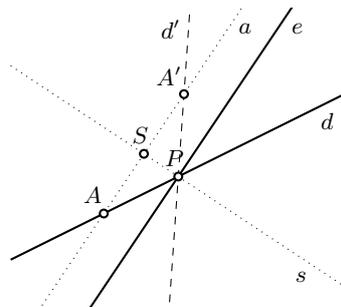
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot |\det(\vec{AB}; \vec{AC})| + \frac{1}{2} \cdot |\det(\vec{AC}; \vec{AD})| = \frac{1}{2} \cdot |2 + 32| + \frac{1}{2} \cdot |48 - 3| = \frac{79}{2}.$$

- c) L'énoncé devrait vous amener à réaliser qu'un partage "à l'aveugle" d'un quadrilatère en triangles peut amener à des erreurs. Dans ce cas, une esquisse — essentielle ! — montre que le quadrilatère est concave, avec le point  $D$  à l'intérieur du triangle  $ABC$ . Pour répondre aux questions posées, on sépare  $ABCD$  en  $ABC$  et  $ADC$ , puis en  $ABD$  et  $DBC$ , pour cela, on utilise par exemple les vecteurs

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les deux manières demandées pour calculer l'aire de  $ABCD$  sont alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \cdot |\det(\vec{AB}; \vec{AC})| - \frac{1}{2} \cdot |\det(\vec{AC}; \vec{AD})| = \frac{1}{2} \cdot |35 + 6| - \frac{1}{2} \cdot |14 + 4| = \frac{23}{2} \quad \text{et} \\ \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \cdot |\det(\vec{AB}; \vec{AD})| + \frac{1}{2} \cdot |\det(\vec{BC}; \vec{BD})| = \frac{1}{2} \cdot |20 - 12| + \frac{1}{2} \cdot |12 + 3| = \frac{23}{2}. \end{aligned}$$

**Exercice 3.** On exploite l'axe de symétrie  $s$  du rayon incident  $d$  et du rayon réfléchi  $d'$  :

On peut résoudre cet exercice avec des calculs de droites, mais l'approche vectorielle semble plus efficace. L'intersection de  $d$  et  $e$  donne le point  $P = (-1; 2)$ , et on choisit arbitrairement un point  $A = (-3; 1)$  de  $d$ . Le vecteur  $\vec{AS}$  est la projection orthogonale de  $\vec{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  sur  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , vecteur directeur de  $e$  :

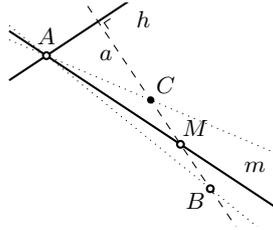
$$\vec{AS} = \text{proj}_{\vec{v}}(\vec{AP}) = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v} = \frac{7}{13} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{13} \\ \frac{21}{13} \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite les coordonnées du point  $A'$ , symétrique de  $A$  par rapport à  $s$  :

$$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AS} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{28}{13} \\ \frac{42}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{13} \\ \frac{55}{13} \end{pmatrix}.$$

La droite  $d' = A'P$  a comme vecteur normal  $\vec{A'P}_\perp = \begin{pmatrix} \frac{29}{13} \\ \frac{2}{-13} \end{pmatrix}$ , et on obtient  $(d') : 29x - 2y + 33 = 0$ .

**Exercice 4.** Puisque  $2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) + 12 \neq 0$ , le point  $C$  n'appartient pas à  $h$ , et de même,  $2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \neq 0$  implique  $C \notin m$ . Si on nomme  $A$  l'intersection de  $h$  et  $m$ , on a la situation suivante :



L'intersection de  $h$  et  $m$  se trouve en résolvant le système formé par  $(h)$  et  $(m)$ ; on obtient  $A = (-3; 2)$ . Le vecteur directeur  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal de la droite  $BC$  qui passe par  $C$  donné, donc

$$(BC) : 3x + 2y - 10 = 0.$$

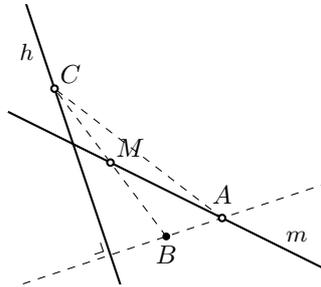
Le point milieu  $M$  de  $[BC]$  est à l'intersection de  $m$  et  $BC$  : la résolution du système formé par les deux équations correspondantes donne  $M = (6; -4)$ . On calcule ensuite

$$\vec{OB} = \vec{OC} + 2 \cdot \vec{CM} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 6-4 \\ -4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Le troisième sommet du triangle est  $B = (8; -7)$ . Avec  $\vec{AB}_\perp = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$  et  $\vec{AC}_\perp = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ , on trouve les deux autres équations des droites supports des côtés :

$$(AB) : 9x + 11y + 5 = 0 \quad \text{et} \quad (AC) : 3x + 7y - 5 = 0.$$

**Exercice 5.** Nous avons la situation suivante :



Suivant l'indication, on pose  $C = (\alpha; \beta)$ . Cette notation permet de différencier les *équations* de droite des *conditions* imposées sur le point spécifique  $C$  cherché. Si cette distinction est claire, il n'y a pas de réel problème à travailler directement avec  $C = (x; y)$ , comme nous le ferons dans d'autres exercices.

Comme  $C \in h$ , on a  $3\alpha + \beta + 11 = 0$ , c'est-à-dire

$$\beta = -3\alpha - 11.$$

Puisque  $M$  est le milieu de  $[BC]$ , on a  $M = \left(\frac{2+\alpha}{2}; \frac{-3\alpha-18}{2}\right)$ . Enfin,  $M \in m$  donne  $\frac{2+\alpha}{2} + 2 \cdot \frac{-3\alpha-18}{2} + 7 = 0$ , c'est-à-dire  $-\frac{5}{2}\alpha = 10$ . On trouve  $\alpha = -4$  et  $\beta = 1$ , et donc

$$C = (-4; 1).$$

Un vecteur normal à  $h$  est  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et un vecteur normal à sa perpendiculaire  $AB$  est donc  $\vec{v}_\perp = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Comme  $AB$  passe par  $B(2; -7)$ , on trouve  $(AB) : -x + 3y + 23 = 0$ . En résolvant le système

$$\begin{cases} x + 2y = -7 \\ -x + 3y = -23 \end{cases}$$

on obtient  $A = (5; -6)$ .

*Remarque.* Le calcul pour  $C$  ci-dessus revient à choisir un point  $C$  sur  $h$ , puis à considérer le milieu  $M$  de  $[BC]$ . Lorsque  $C$  varie sur  $h$  (c'est-à-dire lorsque le paramètre  $\alpha$  varie), le point  $M$  décrit une droite  $n$  parallèle à  $h$ ; la dernière étape du calcul correspond à l'intersection de  $n$  avec  $m$  — dont on déduit l'emplacement de  $C$ .

**Exercice 6.** Comme précédemment, posons  $C = (\alpha; \beta)$ . L'aire du triangle se calcule avec

$$\frac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha - 2 \\ 1 & \beta + 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-\alpha + \beta + 5)$$

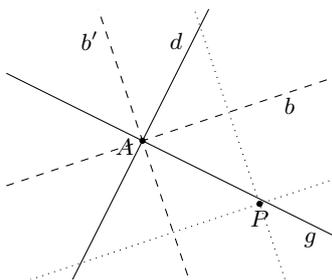
et l'équation  $\frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})| = \frac{3}{2}$  devient  $-\alpha + \beta + 5 = \pm 3$ , c'est-à-dire  $-\alpha + \beta = -2$  ou  $-\alpha + \beta = -8$  (chacune de ces équations correspond à une droite parallèle à  $[AB]$ , à distance  $\frac{3}{\sqrt{2}}$  de  $AB$ , sur laquelle peut se trouver  $C$ ).

Comme le centre de gravité  $G = \left(\frac{5+\alpha}{3}; \frac{-5+\beta}{3}\right)$  est sur  $d$ , la condition  $\frac{-5+\beta}{3} = 3 \cdot \frac{5+\alpha}{3} - 8$  devient  $3\alpha - \beta = 4$ . Les systèmes

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = -2 \\ 3\alpha - \beta = 4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\alpha + \beta = -8 \\ 3\alpha - \beta = 4 \end{cases}$$

donnent chacun un sommet  $C$  possible : on trouve respectivement  $C_1 = (1; -1)$  et  $C_2 = (-2; -10)$ .

**Exercice 7.** Comme les bissectrices  $b$  et  $b'$  de  $d$  et  $g$  sont des axes de symétrie de ces droites, les deux droites cherchées, en pointillés ci-dessous, sont des droites passant par  $P$  et perpendiculaires aux bissectrices (on peut vérifier par calcul que  $P$  n'est ni sur  $d$ , ni sur  $g$ , même si cela n'a pas d'incidence ici) :



Les équations des bissectrices de  $d$  et  $g$  sont données par

$$\frac{2x - y + 5}{\sqrt{5}} = \pm \frac{3x + 6y - 1}{3\sqrt{5}}$$

c'est-à-dire par  $(b) : 3x - 9y + 16 = 0$  et  $(b') : 9x + 3y + 14 = 0$  dont des vecteurs directeurs sont respectivement  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Les droites cherchées ont ces vecteurs comme vecteurs normaux, et on obtient les deux équations  $3x + y = 5$  et  $-x + 3y = -5$ .

**Exercice 8.**

a) Comme  $\delta(E; d) = \frac{|3 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) + 9|}{\sqrt{34}} = \frac{17}{\sqrt{34}}$ , les deux droites à distance  $\frac{17}{\sqrt{34}}$  de  $E$  et perpendiculaires à  $d$  sont les droites cherchées. Le vecteur directeur  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  de  $d$  est un vecteur normal des droites cherchées, dont les équations sont conséquemment de la forme  $(g) : 5x + 3y + c = 0$ . La condition  $\delta(E; g) = \frac{17}{\sqrt{34}}$  donne

$$\frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + c}{\sqrt{34}} = \pm \frac{17}{\sqrt{34}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad c = -2 \pm 17 ;$$

les deux équations des droites supports des côtés perpendiculaires à  $d$  sont donc :  $5x + 3y + 15 = 0$  et  $5x + 3y - 19 = 0$ .

b) Soit  $F$  la projection orthogonale de  $E$  sur  $d$  et  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$  un vecteur normal de  $d$ . À l'aide d'un point quelconque de  $d$ , par exemple  $P = (-3; 0)$ , on calcule  $\overrightarrow{EP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ , puis

$$\overrightarrow{EF} = \text{proj}_{\vec{n}}(\overrightarrow{EP}) = \frac{-17}{34} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad \overrightarrow{EF}_{\perp} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} .$$

On peut alors calculer les 4 sommets du carré :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF}_{\perp} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} & \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EF}_{\perp} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF}_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} & \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EF}_{\perp} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où les 4 sommets  $A = (-3; 0)$  (on retombe sur  $P$  par hasard),  $B = (0; -5)$ ,  $C = (5; -2)$  et  $D = (2; 3)$ .

**Exercice 9.**

- a) Les centres  $C$  des cercles sont sur la médiatrice  $m$  de  $[AB]$  : celle-ci passe par le milieu  $M = (3/2; 9/2)$  du segment et possède  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$  comme vecteur normal ; son équation est donc  $7x + 7y = 42$ , c'est-à-dire  $(m) : y = -x + 6$ . Le centre est aussi à même distance de  $A$  que de l'axe  $Ox$  d'équation cartésienne  $y = 0$  : en posant  $C = (x; y)$ , on a  $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2$  et l'équation  $\delta(C; Ox)^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2$  se récrit

$$y^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad x^2 + 4x - 2y + 5 = 0$$

(les points  $P = (x; y)$  satisfaisant cette équation sont à même distance d'un point et d'une droite ; ils décrivent donc une parabole de foyer  $C$  et de directrice  $Ox$ ). En substituant  $y$  donné par  $(m)$  dans cette dernière équation, on obtient  $x^2 + 6x - 7 = 0$  qui se factorise par Viète comme  $(x-1)(x+7) = 0$ . Si  $x = 1$ , l'équation  $(m)$  donne  $y = 5$  ; et si  $x = -7$ , on a  $y = 13$ . En substituant ces valeurs dans le rayon au carré  $\|\overrightarrow{AC}\|^2$  donné ci-dessus (ou mieux, dans  $\delta(C; Ox)^2 = y^2$  qui est bien plus facile à calculer), on obtient respectivement les équations suivantes pour les deux cercles recherchés :

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 25 \quad \text{et} \quad (x+7)^2 + (y-13)^2 = 169$$

*Remarque.* Dès que l'on savait que  $C$  était sur la médiatrice  $m$ , on aurait pu poser  $C = (x; -x+6)$  et continuer les calculs avec ce  $C$  (les calculs auraient été un peu plus simples) ; nous proposons dans cet item la méthode ci-dessus pour faire apparaître explicitement l'intersection d'une droite et d'une parabole, et expliquer ainsi géométriquement l'existence des deux cercles solutions.

- b) On procède comme au point précédent. Le milieu de  $[AB]$  est  $M = (1; 3)$ , et le vecteur normal  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \end{pmatrix}$  donne l'équation  $-12x + 4y = 0$  de la médiatrice de  $[AB]$ , que l'on peut récrire  $(m) : y = 3x$ . Avec  $C = (x; y)$  et  $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = (x-7)^2 + (y-1)^2$ , l'équation  $\delta(C; t)^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2$  devient

$$\frac{(x+y-10)^2}{2} = (x-7)^2 + (y-1)^2$$

qui décrit la parabole de foyer  $A$  et de directrice  $t$ . En a), nous avons développé cette équation, puis substitué le  $y$  de  $(m)$ . Comme mentionné dans la remarque, les calculs sont plus simples, si on effectue d'abord la substitution avant de développer : on obtient ainsi

$$2(2x-5)^2 = (x-7)^2 + (3x-1)^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2x(x+10) = 0$$

dont les solutions sont  $x = 0$  (et alors  $y = 0$ ) et  $x = -10$  (et alors  $y = -30$ ). Le rayon au carré est donné par  $\|\overrightarrow{AC}\|^2$  (ou  $\delta(C; t)^2$ , plus facile à calculer), et on obtient respectivement les équations suivantes pour les deux cercles recherchés :

$$x^2 + y^2 = 50 \quad \text{et} \quad (x+10)^2 + (y+30)^2 = 1250 .$$

- c) Dans ce cas, le centre du cercle sera sur les bissectrices  $b$  ou  $b'$  des droites données, bissectrices obtenues par les équations

$$\frac{3x+4y-35}{5} = \pm \frac{4x+3y+14}{5}$$

qui donnent  $x-y+49=0$  et  $x+y-3=0$ , et dont on tire  $(b) : y = x+49$  et  $(c) : y = -x+3$ . Les droites  $d$  et  $g$  partagent le plan en 4 parties. Puisque les cercles recherchés doivent passer par  $A$  (et qu'une vérification facile montre que  $A$  n'est ni sur  $d$  ni sur  $g$ ), les cercles seront inclus dans la même portion du plan que le point. Une esquisse de  $d$  et  $g$  (ou un raisonnement sur leur équation) montre que  $A$  est dans la même portion de plan que la bissectrice  $c$  de pente négative.

Le centre du cercle doit aussi être à la même distance de  $d$  et de  $A$ , c'est-à-dire  $C = (x; y)$  sera sur la parabole d'équation  $\delta(C; d)^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2$  ; en substituant directement  $C = (x; -x+3)$ , on obtient

$$\frac{(-x-23)^2}{25} = (x+1)^2 + (-x-2)^2 \quad \text{soit encore} \quad 49x^2 + 104x - 404 = 0$$

dont les solutions sont  $x = 2$  et  $x = -\frac{202}{49}$  ; celles-ci donnent respectivement  $y = 1$  et  $y = \frac{349}{49}$ . Les cercles recherchés sont donc

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \quad \text{et} \quad \left(x + \frac{202}{49}\right)^2 + \left(y - \frac{349}{49}\right)^2 = \left(\frac{185}{49}\right)^2$$

**Exercice 10.** Il n'a qu'une seule tangente commune, d'équation  $y = -7$  (pourquoi?).