Q23 : (12 points)

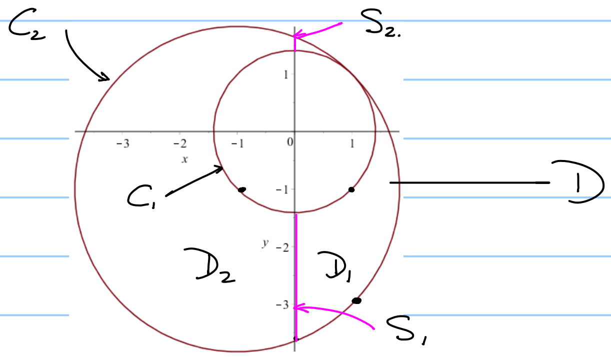
Soit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 2,\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 8\}.$$

Trouver, en justifiant en détail la démarche, l'image de la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = |x| - y,$$

c'est-à-dire déterminer l'ensemble $I = \{z \in \mathbb{R} : \exists (x,y) \in D \text{ tel que } z = f(x,y)\}$.



2 i) le domaine D est compact (borné + fermé), connexe par arcs
① ②

1 ii) $f(x,y) = |x| - y$ continue sur $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ f continue sur D
③

2 ①+③ $\Rightarrow$ f admet un minimum m et un maximum M sur D

①+②+③ + théorème de la valeur intermédiaire $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$

1 iii) les points d'extremums sont possibles

a) dans $\mathring{D}$ en les points stationnaires de f

b) dans $\mathring{D}$ en des points où f n'est pas différentiable

c) sur ∂D.

b) f n'est pas différentiable en $\{(x,y) \in D : x = 0\} = S_1 \cup S_2$

où $S_1 = \{(0,y) : y \in [-1-\sqrt{7}, -\sqrt{2}]\}$

et $S_2 = \{(0,y) : y \in [\sqrt{2}, -1+\sqrt{7}]\}$.

car $y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$ et $1^2 + (y+1)^2 = 8 \Rightarrow y = -1 \pm \sqrt{7}$!

1 $f|_{S_1} = -y \Rightarrow \sqrt{2} \leq f|_{S_1} \leq \boxed{1+\sqrt{7}}$ candidat pour M.

$f|_{S_2} = -y \Rightarrow \boxed{1-\sqrt{7}} \leq f|_{S_2} \leq -\sqrt{2}$ candidat pour m

a) Soit $D_1 = \{ (x,y) \in \mathring{D} : x > 0 \}$.

$f_1(x,y) = x - y \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f|_{D_1} = f_1|_{D_1}$ de classe C^1

points stationnaires dans D_1 : $\nabla f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1

Soit $D_2 = \{ (x,y) \in \mathring{D} : x < 0 \}$

$f_2(x,y) = -x - y \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f|_{D_2} = f_2|_{D_2}$ de classe C^1

points stationnaires dans D_2: $\nabla f_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c). on étudie les fonctions f_1 et f_2 sur les cercles C_1 et C_2

Cercle $C_1 := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x,y) = 0 \}$, $g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 2$.

$g_1 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et $\nabla g_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur C_1

1

Cercle $C_2 := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : g_2(x,y) = 0 \}$, $g_2(x,y) = (x+1)^2 + (y+1)^2 - 8$

$g_2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et $\nabla g_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x+1) \\ 2(y+1) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur C_2.

$\Rightarrow$ <u>On peut utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange</u>

<u>Sur C_1:</u> $F_1(x,y) = x - y - \lambda (x^2 + y^2 - 2)$ $(x > 0)$

$F_2(x,y) = -x - y - \lambda (x^2 + y^2 - 2)$ $(x < 0)$

<u>$\nabla F_1 = 0$:</u> ① $1 - 2\lambda x = 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2x} \underset{②}{\Rightarrow} -1 - \frac{y}{x} = 0$

② $-1 - 2\lambda y = 0 \Rightarrow y \neq 0 \Rightarrow \underline{y = -x}$

③ $x^2 + y^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + x^2 = 2 \Rightarrow \underline{x = 1,\ y = -1}$

1 $f(1,-1) = 1 + 1 = \boxed{2}$ neiter m nor M.

<u>$\nabla F_2 = 0$:</u> $-1 - 2\lambda x = 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2x} \Rightarrow -1 + \frac{y}{x} = 0$

$-1 - 2\lambda y = 0 \Rightarrow y \neq 0 \Rightarrow y = x.$

$x^2 + y^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + x^2 = 2 \Rightarrow \underline{x = -1,\ y = -1}$

$f(-1,-1) = 1 + 1 = \boxed{2}$

$\underline{\text{sur } C_2:}$ $F_1(x,y) = x - y - \lambda\left((x+1)^2 + (y+1)^2 - 8\right)$ $\quad (x>0)$

$F_2(x,y) = -x - y - \lambda\left((x+1)^2 + (y+1)^2 - 8\right)$ $\quad (x<0)$

$\underline{\nabla F_1 = 0:}$

$$1 - 2\lambda(x+1) = 0 \Rightarrow x+1 \neq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2(x+1)}$$

$$-1 - 2\lambda(y+1) = 0 \Rightarrow y+1 \neq 0 \Rightarrow -1 - \frac{y+1}{x+1} = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 - 8 = 0 \qquad \Rightarrow x+1 = -(y+1)$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow x = 1,\ y = -3.$$

$f(1,-3) = 1+3 = \boxed{4}$ nouveau candidat pour M.

$\underline{\nabla F_2 = 0:}$

$$-1 - 2\lambda(x+1) = 0 \Rightarrow x+1 \neq 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2(x+1)}$$

$$-1 - 2\lambda(y+1) = 0 \Rightarrow y+1 \neq 0 \Rightarrow -1 + \frac{y+1}{x+1} = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 - 8 = 0 \qquad \Rightarrow x+1 = y+1.$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow \underline{x = -3,\ y = -3}$$

$f(-3,-3) = 3+3 = \boxed{6}$ $\underline{\text{c'est } M.}$

$\underline{\text{Conclusion}}$: $m = 1-\sqrt{7}$, $M = 6$, $\boxed{\mathrm{Im}\, f = [1-\sqrt{7}, 6].}$

Q24 (10 points)

Soit l'équation différentielle pour une fonction $y(x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$y' = y\,(1-y)\ .$$

(a) Trouver pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ la solution maximale pour la condition initiale $y(0) = y_0$.

(b) Existent-t-ils d'autres solutions que celles trouvées sous (a) ? Justifier votre réponse.

(a) Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y\,(1-y). \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Séparation des variables

see below

i) $y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$, $y(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}$ sont des solutions

ii). $\dfrac{dy}{y(1-y)} = dx.$

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} = \frac{A + (B-A)y}{y\,(1-y)} \Rightarrow A = 1,\ B = A = 1$$

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = dx.$$

$$\ln(|y|) - \ln(|1-y|) = x + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\ln\left(\left|\frac{y}{1-y}\right|\right) = x + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}}$$

$$\left|\frac{y}{1-y}\right| = C \cdot e^x \quad , \quad C > 0$$

$$\frac{y}{1-y} = C \cdot e^x \quad , \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$y(1 + Ce^x) = Ce^x$$

$$\boxed{y(x) = \frac{Ce^x}{1 + Ce^x} \quad , \quad C \in \mathbb{R}^*.}$$ ou $C \in \mathbb{R}$

iii). Soit $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$$y(0) = \frac{C}{1+C} = y_0 \implies C(1-y_0) = y_0$$

1 $$\implies C = \frac{y_0}{1-y_0} \implies \boxed{y(x) = \frac{y_0 e^x}{1+y_0(e^x-1)}}$$

iv) Solutions maximales :

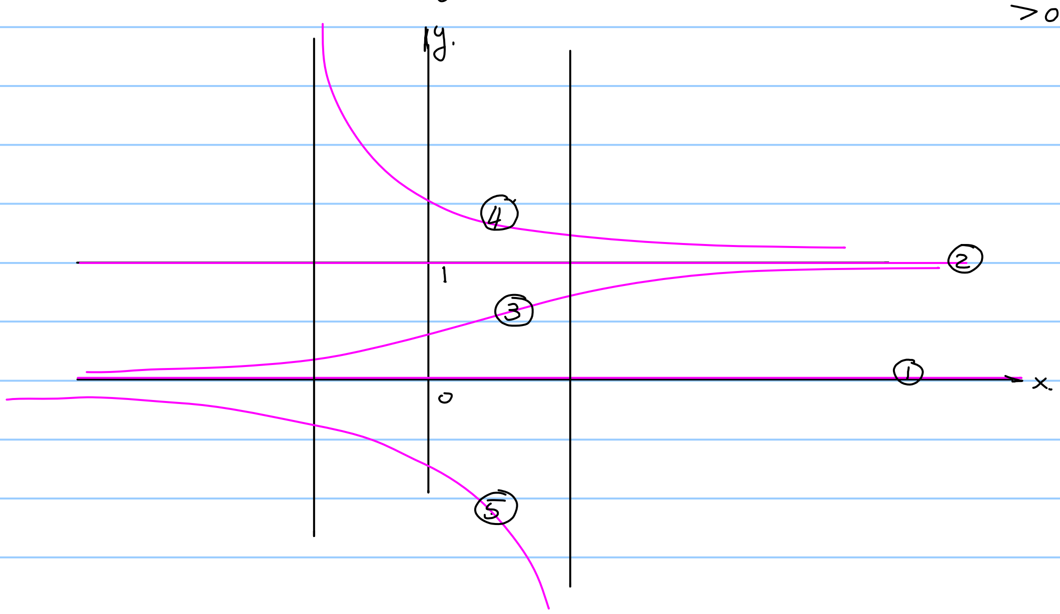
1
① $y_0 = 0$: $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$;

② $y_0 = 1$: $y(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$;

1 ③ $0 < y_0 < 1$: $y(x) = \dfrac{y_0 e^x}{1+y_0(e^x-1)}$ $x \in \mathbb{R}$;

1 ④ $y_0 > 1$: $y(x) = \dfrac{y_0 e^x}{1+y_0(e^x-1)}$, $x \in \left]\underbrace{\ln\left(1-\frac{1}{y_0}\right)}_{<0}, +\infty\right[$;

1 ⑤ $y_0 < 0$: $y(x) = \dfrac{y_0 e^x}{1+y_0(e^x-1)}$, $x \in \left]-\infty, \underbrace{\ln\left(1-\frac{1}{y_0}\right)}_{>0}\right[$



(+1) (b) Oui, car si $y(x)$ est une solution maximal sur I, la restriction de $y(x)$ à un intervalle ouvert $J \subset I$ est aussi une solution.

2 Non. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et soit $y(x)$ la solution

maximale telle que $y(0)=y_0$. Alors, vu que l'équation est autonome, la fonction $y_1(x)=y(x-x_0)$ est maximale sur l'intervalle translaté et satisfait $y_1(x_0)=y(0)=y_0$. On a donc trouvé une solution pour toute condition initiale. Ces solutions sont uniques, car la fonction $f(x,y)=y(1-y)$ satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité.

Q25 (8 points)

Démontrer soigneusement, en contrôlant les hypothèses de tout théorème utilisé, la version suivante du théorème du "smiley vert" :

Théorème. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert non-vide, et soit $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, une fonction telle que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$ existent en tout point $p \in D$. Alors, si les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en un point $p_0 \equiv (x_0, y_0) \in D$, la fonction f est différentiable en p_0.

i) f différentiable en $p \equiv (x_0, y_0)$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \varepsilon(x,y) \left\| \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\|$$

avec $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x,y) = 0$.

et dans ce cas $f'(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right)$.

$\Longleftrightarrow$

$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}}_{=(*)} = 0$$

ii). $f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y)$
$+ f(x_0,y) - f(x_0,y_0)$

continue (en x) sur tout intervalle I fermé tel que $I \times \{y\} \subset D$ et dérivable (en x) sur $\mathring{I}$

continue (en y) sur tout intervalle J fermé tel que $\{x_0\} \times J \subset D$ et dérivable (en y) sur $\mathring{J}$

Par le théorème des accroissements finis il existent $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]$, tel que.

$$\begin{cases} f(x,y) - f(x_0,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1(x-x_0), y) \cdot (x-x_0) \end{cases}$$

$$f(x_0,y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_2(y-y_0)).(y-y_0)$$

En utilisant que $\left|\dfrac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right| \leq 1$

et $\left|\dfrac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right| \leq 1.$

on obtient que

$$|(*)| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1(x-x_0),y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_2(y-y_0))-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|$$

et donc que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (*) = 0$

par la continuité des fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en (x_0,y_0).