

## Corrigé question 23

a)  $\mathring{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ .

$f \in C^1(\mathring{D})$ , points stationnaire.  $\Leftrightarrow \nabla f(x, y, z) = 0$ .

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -z \\ 2y-2 \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{x=z=0, y=1.}$$

② 
$$\text{Hess}(f)(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Lambda_1 = 0 \\ \Lambda_2 = 0 \\ \Lambda_3 = (-1) \cdot (2) = -2 < 0 \end{array}$$
  
 $\Rightarrow$  il s'agit d'un point-selle  
 $f(0, 2, 0) = \underline{0}$

(b)  $f$  la restriction d'un polynôme à  $\mathring{D}$ . Donc

$f$  continue sur  $\mathring{D}$ ,  $\mathring{D}$  compact et connexe par arc.

$\Rightarrow \text{Im}(f) = [m, M]$  avec  $m, M$  le maximum et le minimum de  $f$

Les points stationnaire dans  $\mathring{D}$  sont des point-selle donc  $m$  et  $M$  sont atteints sur le bord  $\partial \mathring{D} = \mathring{D}^\circ$ .

Analyse de  $f$  sur  $\partial \mathring{D}$  (par Lagrange)

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda (x^2 + y^2 + z^2 - 4)$$

①  $-z - 2\lambda x = 0$

②  $2y - 2 - 2\lambda y = 0 \Rightarrow \underline{y \neq 0}$

③  $-x - 2\lambda z = 0$

④  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

④ cas 1:  $x = z = 0, y = \pm 2 \quad (\Rightarrow \lambda = \frac{y-1}{y} \begin{matrix} +2 & -2 \\ -2 & 2 \end{matrix} \frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} f(0, 2, 0) = \underline{0} \\ f(0, -2, 0) = \underline{8} \end{array})$

cas 2:  $\underset{①}{z} = -2\lambda \underset{③}{x} = 4\lambda^2 z \quad (\lambda \neq 0 \text{ sinon cas 1}).$

$$\Rightarrow 4\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\lambda = -\frac{1}{2}} \quad (+\frac{1}{2} \text{ déjà fait})$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow 3y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}, \quad 2x^2 + \frac{4}{9} = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{4}{3}$$

$$f\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{9} + \frac{4}{9} - \frac{12}{9} = -\frac{24}{9}$$

$$f\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{9} + \frac{4}{9} - \frac{12}{9} = -\frac{24}{9}$$

←  $\notin D_+$

$$\text{Im}(f) = \left[-\frac{24}{9}, 8\right].$$

(c)  $D_+ \subset \mathbb{D}$ , ( $D_+$  compact connexe par arc.).

Donc  $I_+ = [m_+, M_+]$  avec  $m_+, M_+$  le minimum et le maximum de  $f$  sur  $D_+$ ,  $\underline{m_+ \geq m, M_+ \leq M.}$

L'analyse précédente montre que  $\underline{m_+ = m, M_+ = M.}$   
 $\Rightarrow I_+ = I.$

Alternative: étudier  $f$  sur le disque  $z = -1$ .

$$g(x, y) = f(x, y, -1) = x + y^2 - 2y.$$

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2y - 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

sur le cercle:  $x^2 + y^2 = 3. \Rightarrow x = \sqrt{3 - y^2}.$

$$\sqrt{3 - y^2} = y(2 - y).$$

$$3 - y^2 = y^2(4 - 2y + y^2).$$

$$y^4 - 2y^3 + 5y^2 - 3 = 0$$

## Corrigé Q24

Soit le problème de Cauchy

$$y' = 4x^3 y^2$$

$$y(x_0) = y_0$$

où  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

Séparation des variables. (3 points)

i)  $y(x) = 0$  est une solution sur  $I = \mathbb{R}$ .

on a existence et unicité (locale), donc  
en tout point du plan la solution est  
unique.

$y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$  est la solution maximale  
pour tout condition initiale de la forme  
 $(x_0, 0)$

ii)  $\left[ \frac{dy}{y^2} = 4x^3 \right]$

$$-\frac{1}{y} = x^4 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$y(x) = -\frac{1}{x^4 + C}.$$

$$y(x_0) = y_0 = -\frac{1}{x_0^4 + C}.$$

$$C = -\frac{1}{y_0} - x_0^4$$

$$y(x) = - \frac{1}{-\frac{1}{y_0} - x_0^4 + x^2} = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + x_0^4 - x^2}$$

cas I  $\frac{1}{y_0} + x_0^4 = 0$

$$y(x) = - \frac{1}{x^4} \quad x \in ]0, +\infty[$$

ou  $x \in ]-\infty, 0[$ .

cas II:  $\frac{1}{y_0} + x_0^4 < 0$

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + \frac{1}{x_0^4} - x^4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

cas III:  $\frac{1}{y_0} + x_0^4 > 0$ .

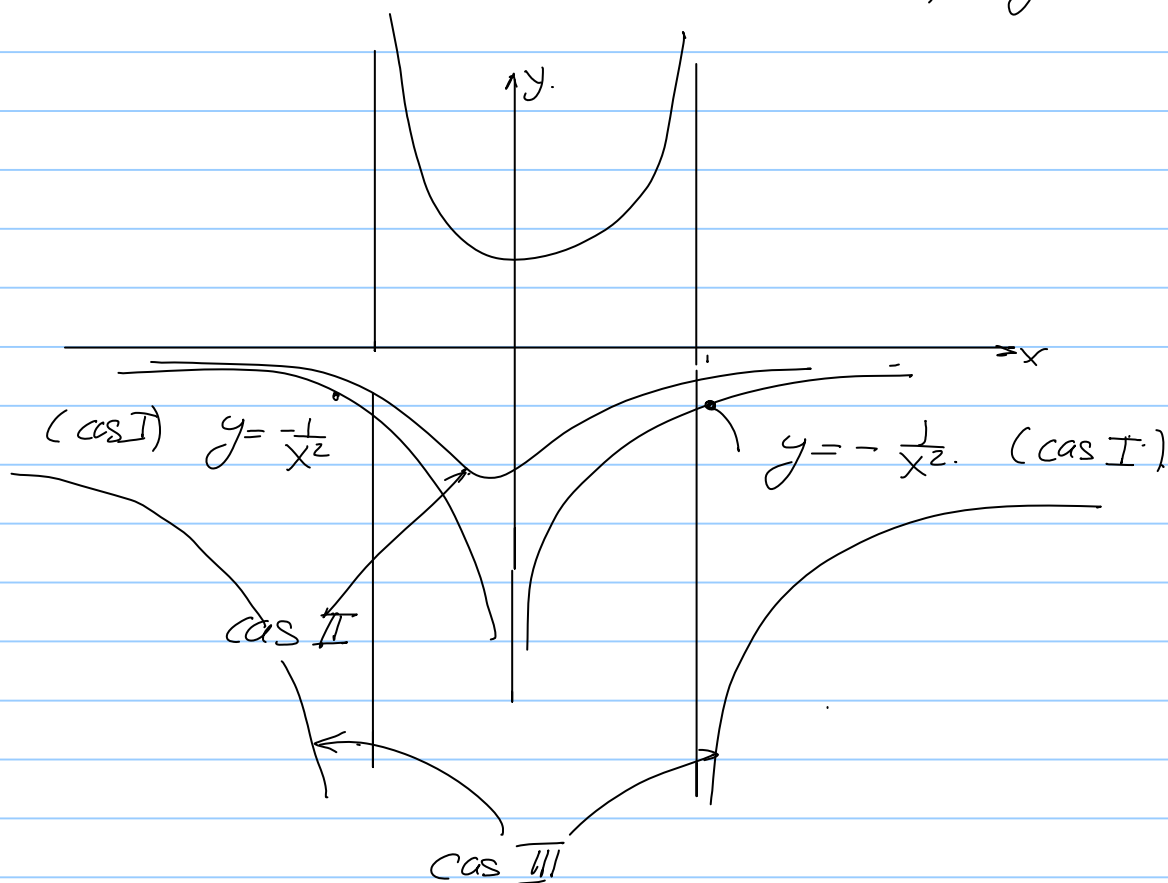
$$x \in ]-\sqrt{\frac{1}{y_0} + x_0^4}, \sqrt{\frac{1}{y_0} + x_0^4}[$$

ou

$$x \in ]\sqrt{\frac{1}{y_0} + x_0^4}, +\infty[$$

ou

$$x \in ]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{y_0} + x_0^4}[$$



## Donc. résumé

lp 0)  $(x_0, 0) : y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

lp ia)  $(x_0, -\frac{1}{x_0^4}), x_0 > 0 : y(x) = -\frac{1}{x^4}, \quad x > 0$

lp ib)  $(x_0, -\frac{1}{x_0^4}), x_0 < 0 : y(x) = -\frac{1}{x^4}, \quad x < 0.$

lp ii).  $\frac{1}{y_0} + x_0^4 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y_0} < -x_0^4 \Leftrightarrow 0 > y_0 > -\frac{1}{x_0^4}$   
$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + x_0^4 - x^4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

lp iiia)  $\underbrace{\frac{1}{y_0} + x_0^4}_{\equiv C^2, C > 0} > 0, \quad \underline{y_0 > 0}$   
$$y(x) = \frac{1}{C^2 - x^4}, \quad x \in ]C, C[.$$

lp iiib)  $\underline{y_0 < 0, x_0 > 0}$   
$$y(x) = \frac{1}{C^2 - x^4}, \quad x \in ]C, +\infty[.$$

lp iiic).  $\underline{y_0 < 0, x_0 < 0}$   
$$y(x) = \frac{1}{C^2 - x^4}, \quad x \in ]-\infty, -C[.$$

## Question 25

1

(a)  $\mathcal{D} \in V$  est ouvert si  $\forall X \in V$  il existe  $\varepsilon > 0$  tel que.  
 $\mathcal{B}(X, \varepsilon) \subset V$

(b)  $\|A\|_V = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^q \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^q, \|Ax\| \leq \|x\|$

$$\Rightarrow \|XY_x\| = \|X(Y_x)\| \leq \|X\|_V \|Y_x\| \leq \|X\|_V \|Y\|_V \|x\|$$

2

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^q, x \neq 0 \quad \frac{\|XY_x\|}{\|x\|} \leq \|X\|_V \|Y\|_V$$

$$\Rightarrow \|XY\|_V = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^q \\ x \neq 0}} \frac{\|XY_x\|}{\|x\|} \leq \|X\|_V \|Y\|_V$$

(c).  $k=1$ :  $\|A\|_V \leq \|A\|_V$ .

montrons que  $\forall k \geq 1, \|A^k\|_V \leq \|A\|_V^k$  (\*).  
 $\Rightarrow \|A^{k+1}\|_V \leq \|A\|_V^{k+1}$

1

$$\|A^{k+1}\|_V = \|A^k A\|_V \stackrel{b)}{\leq} \|A^k\|_V \|A\|_V$$

$$\stackrel{(*)}{\leq} \|A\|_V^k \|A\|_V = \|A\|_V^k$$

(d).  $C_k := \sum_{e=0}^k B^e$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ t.q. } \forall n, m \geq n_0, \|C_n - C_m\|_V \leq \varepsilon$$

$n > m$ :  $\|C_n - C_m\|_V = \left\| \sum_{e=m+1}^n B^e \right\|_V$

$$= \|B^{m+1} \left( \sum_{e=0}^{n-m-1} B^e \right)\|_V$$

$$\leq \|B^{m+1}\|_V \left\| \sum_{e=0}^{n-m-1} B^e \right\|_V$$

2

$$\leq \|B\|_V^{m+1} \sum_{\substack{e=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \|B\|_V^e \leq \frac{\|B\|_V^{m+1}}{1 - \|B\|_V} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \exists m_0 \text{ t. q. } \leq \varepsilon.$$

e).  $\lim_{k \rightarrow \infty} (I - B) \sum_{e=0}^k B^e = \lim_{k \rightarrow \infty} (I - B)(I + B + \dots + B^k)$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} (I - B + B - \dots - B^{k+1}) = I - \lim_{k \rightarrow \infty} B^{k+1} = I.$$

$$\|0 - B^{k+1}\|_V \leq \|B\|_V^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

f). à montrer:

$$\forall X \in V, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall Y \in V.$$

$$\|X - Y\|_V \leq \delta \Rightarrow \|f_A(X) - f_A(Y)\|_V \leq \varepsilon.$$

$$\|f_A(X) - f_A(Y)\|_V = \|AX - AY\|_V = \|A(X - Y)\|_V$$

$$\leq \|A\|_V \|X - Y\|_V = \|A\|_V \cdot \delta \leq \varepsilon.$$

o.b. si  $\|A\|_V = 0$ , on peut choisir  $\delta = \frac{1}{\|A\|_V} \varepsilon$

g) Soit  $X = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k$ . À montrer.

$$(I - B)^{-1} - \lim_{k \rightarrow \infty} C_k = 0.$$

$$\Leftrightarrow I - (I - B) \lim_{k \rightarrow \infty} C_k = 0.$$

$$\stackrel{\text{f)}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} ((I - B) C_k) = I.$$

1 h) fonks