



Ens. : Peter Wittwer

Analyse avancée II - PH

26 juin 2023

Durée : 3.5 heures

SCIPER :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question [SCQ-01] : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^2 + y^4} \equiv \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^4}} \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^4}} y & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Alors :

- ☒ f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0, 0)$
- ☐ les dérivées partielles de f en $(0, 0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$
- ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$
- ☐ f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$

Question [SCQ-02] : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = 5 \cos(x)$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$ vérifie :

- ☒ $y(\pi) = -1$ ☐ $y(\pi) = 1 - e^\pi$
- ☐ $y(\pi) = 1$ ☐ $y(\pi) = 1 + e^\pi$

Question [SCQ-03] : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle de Riccati

$$y' = -y^2 + 2xy - x^2 + 1$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$ vérifie :

- ☒ $y(1) = \frac{3}{2}$ ☐ $y(1) = 0$
- ☐ $y(1) = -\frac{1}{2}$ ☐ $y(1) = -2$

Question [SCQ-04] : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sqrt{\frac{|y|}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et soit le vecteur $\mathbf{v} = (1, 1)^T \in \mathbb{R}^2$. Alors on a pour la dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$:

- ☒ $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = 1$ ☐ $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = 0$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = 2$ ☐ $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0)$ n'existe pas

CATALOGUE

Question [SCQ-05] : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + 2x + xy + xz + yz + \frac{1}{2}z^2 - z$$

Alors f possède sur $\mathbb{R}^3$:

- ☒ un point selle
- ☐ deux points selle
- ☐ un point de minimum local
- ☐ un point de maximum local

Question [SCQ-06] : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \sin(x - y + z^2) e^{1-z}$. Alors son polynôme de Taylor d'ordre deux autour du point $(0, 1, 1)$ est donné par :

- ☒ $p_2(x, y, z) = x - (y - 1) + 2(z - 1) - (z - 1)^2 - x(z - 1) + (y - 1)(z - 1)$
- ☐ $p_2(x, y, z) = x - y + z^2 - xz + yz) e$
- ☐ $p_2(x, y, z) = x - y + z^2 + yz$
- ☐ $p_2(x, y, z) = x - (y - 1) + 2(z - 1) - (z - 1)^2 + (y - 1)(z - 1)$

Question [SCQ-07] : Soit la fonction $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$F((x_1, x_2), (x_3, x_4)) = (-x_1 + x_3, -2x_2 + 2x_4)^T.$$

et soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie implicitement par $f(1, 1) = (1, 1)$ et $F((x_1, x_2), f(x_1, x_2)) = 0$. Alors :

- ☒ $f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$
- ☐ $f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix}$

Question [SCQ-08] : Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_{2x}^{x^2} \sin(xt) dt.$$

Alors :

- ☒ $f'(2) = 2 \sin(8)$
- ☐ $f'(2) = 0$
- ☐ $f'(2) = 3 \sin(8)$
- ☐ $f'(2) = 4 \sin(8) - 2 \cos(4)$

Question [SCQ-09] : Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = y + z$. Alors le minimum m et le maximum M de f sous les contraintes $x^2 + y^2 - 1 = 0$ et $x + z - 1 = 0$ sont :

- ☒ $m = 1 - \sqrt{2}$ et $M = 1 + \sqrt{2}$
- ☐ $m = 1$ et $M = 1$
- ☐ $m = 0$ et $M = 2$
- ☐ $m = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ et $M = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

CATALOGUE

Question [SCQ-10] : Soit

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 4\}.$$

Alors l'intégrale

$$\int_D \frac{z}{\sqrt{8(x^2 + y^2) + z^2}} \, dx \, dy \, dz$$

vaut :

☒ $\pi \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

☐ π

☐ $\pi \left(2 - \sqrt{3}\right)$

☐ $\frac{3}{2}\pi$

Question [SCQ-11] : Soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \frac{1}{2}x, y \geq -2x, y \leq -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}\},$$

ou autrement dit, soit D le domaine triangulaire dont les sommets sont $(0, 0)$, $(2, 1)$ et $(-1, 2)$. Alors l'intégrale

$$\int_D 2x + y \, dx \, dy$$

vaut :

☒ $\frac{25}{6}$

☐ $\frac{5}{6}$

☐ $-\frac{5}{6}$

☐ $-\frac{25}{6}$

Question [SCQ-12] : Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface définie par $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$. Alors l'équation du plan tangent à S au point $(1, 1, 0)$ est :

☒ $x + y - 2 = 0$

☐ $z + 2x + 2y - 4 = 0$

☐ $z = 2(x - 1) + 2(y - 1)$

☐ $x + y = 0$

CATALOGUE

Question [SCQ-13] : Soient les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ et $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définies par

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} u + v \\ -u + v \\ u - v \\ u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \\ x(y + z + t) + y(z + t) + zt \end{pmatrix}.$$

Alors on a la matrice jacobienne suivante :

☒ $J_{f \circ g}(u, v) = \begin{pmatrix} 8u - 2v & -2u + 6v \\ 3v & 3u - 2v \end{pmatrix}$

☐ $J_{f \circ g}(u, v) = \begin{pmatrix} 8u - 2v & -2u + 6v \\ -2u + 6v & 3u - 2v \end{pmatrix}$

☐ $J_{f \circ g}(u, v) = \begin{pmatrix} 8u + 2v & 3v \\ 3v & 3u - 2v \end{pmatrix}$

☐ $J_{f \circ g}(u, v) = \begin{pmatrix} 8u + 2v & 3v \\ -2u + 6v & 3u - 2v \end{pmatrix}$

Question [SCQ-14] : Soit

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^1 y^{\frac{2}{3}} \sin(y) \, dy \right) dx$$

Alors :

☒ $I = -\cos(1) + \sin(1)$

☐ $I = \cos(1) + \sin(1)$

☐ $I = \sin(y + z)$

☐ $I = 1$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question [TF-01] : L'ensemble $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ est fermé.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-02] : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$ et soit $((x_k, y_k))_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de D . Alors, il existe une sous-suite $(x_{k_j})_{j \geq 0}$ de la suite des coordonnées $(x_k)_{k \geq 0}$ qui converge vers un élément de $[-1, 1]$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-03] : Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$. Alors la restriction de f à un sous-ensemble non-vide, ouvert et borné de $\mathbb{R}^n$ est une fonction bornée.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-04] : Soit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si quelque soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et quelque soit $p \in]0, +\infty[$ on a $\lim_{t \rightarrow 0+} f(\alpha t, \beta t^p) = 0$, alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question [TF-05] : L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$ est connexe par arcs.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-06] : Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$. Alors tout point $p \in \mathbb{R}^n$ tel que $\text{grad} f(p) \neq 0$ est un point-selle de f .

☐ VRAI ☒ FAUX

Question [TF-07] : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, une fonction de classe $C^3(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Alors en tout point $p \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(p) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}(p).$$

☒ VRAI ☐ FAUX

Question [TF-08] : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Alors le problème de Cauchy $y' = f(x, y)$, $y(0) = 0$, admet une solution qui est définie sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Vos réponses doivent être soigneusement justifiées et toutes les étapes de votre raisonnement doivent y figurer. Utiliser un **stylo** à encre **noir ou bleu foncé**.

Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Tourner les pages ! Cette section contient 3 questions à 12, 10 et 8 points !

Question 23: *Cette question est notée sur 12 points.*

☐	0	☐	1	☐	2	☐	3	☐	4	☐	5	☐	6	☐	7	☐	8	☐	9	☐	10	☐	11	☒	12	<i>Réservé au correcteur</i>
--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	----	--------------------------	----	-------------------------------------	----	------------------------------

Soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 2, (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 8\}.$$

Trouver, en justifiant en détail la démarche, l'image de la fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = |x| - y,$$

c'est-à-dire déterminer l'ensemble $I = \{z \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in D \text{ tel que } z = f(x, y)\}.$

CATALOGUE

Question 24: *Cette question est notée sur 10 points.*

Réservé au correcteur

Soit l'équation différentielle pour une fonction $y(x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$y' = y (1 - y) .$$

- Trouver pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ la solution maximale pour la condition initiale $y(0) = y_0$.
- Existent-ils d'autres solutions que celles trouvées sous (a) ? Justifier votre réponse.

CATALOGUE

Question 25: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐	0	☐	1	☐	2	☐	3	☐	4	☐	5	☐	6	☐	7	☒	8
--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	-------------------------------------	---

Réservé au correcteur

Démontrer soigneusement, en contrôlant les hypothèses de tout théorème utilisé, la version suivante du théorème du “smiley vert” :

Théorème. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert non-vide, et soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, une fonction telle que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$ existent en tout point $p \in D$. Alors, si les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en un point $p_0 \equiv (x_0, y_0) \in D$, la fonction f est différentiable en p_0 .



CATALOGUE

CATALOGUE

CATALOGUE