EPFL

Ens. : Peter Wittwer
Analyse avancée II - (n/a)
21 juin 2022
Durée : 3.5 heures

n/a

n/a

SCIPER : **999999** Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte,
  - 0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si la réponse est correcte,
  - 0 point s'il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question [SCQ-01] : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^2+y^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors :

- ■ f est différentiable en $(0,0)$, et la fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$
- □ f est de classe $C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$
- □ f est différentiable en $(0,0)$, et la fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$
- □ les dérivées partielles de f en $(0,0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$

Question [SCQ-02] : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u'' + 2u' + u = 1 + 4\mathrm{e}^t + 9\mathrm{e}^{2t}$$

qui satisfait la condition initiale $u(0) = 3$ et $u'(0) = 3$ vérifie en $a = \ln(2)$:

- ■ $u(a) = 7$
- □ $u(a) = \dfrac{7}{4}$
- □ $u(a) = -\frac{1}{2}\ln(2)$
- □ $u(a) = 3$

Question [q:mc-03] : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'' - 2\,(y+1)^3 = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ vérifie en $a = -1$:

- ■ $y(a) = -\dfrac{1}{2}$
- □ $y(a) = 0$
- □ $y(a) = \dfrac{1}{2}$
- □ $y(a) = -2$

Question [SCQ-05] : Soit $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$h(x,y,z) = \begin{pmatrix} xe^{y+z} \\ xe^{y-z} \\ xe^{-y} \end{pmatrix},$$

soit $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(u,v,w) \mapsto g(u,v,w)$, une fonction de classe C^1 et soit $f = g \circ h$. Alors, indépendamment du choix de g, on a :

- ■ $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = e^2 \frac{\partial g}{\partial u}\left(e^2,1,e^{-1}\right) - \frac{\partial g}{\partial v}\left(e^2,1,e^{-1}\right)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = e^2 \frac{\partial g}{\partial u}(1,1,1) - \frac{\partial g}{\partial v}(1,1,1)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = e^{-1} \frac{\partial g}{\partial u}(1,1,1) - e^{-1}\frac{\partial g}{\partial w}(1,1,1)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = e^2 \frac{\partial g}{\partial u}\left(e^2,1,e^{-1}\right) - \frac{\partial g}{\partial w}\left(e^2,1,e^{-1}\right)$

Question [SCQ-06] : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = e^{x^2-y+z^3}$. Alors son polynôme de Taylor $p_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ d'ordre 3 autour du point $(0,0,0)$ est donné par :

- ■ $p_3(x,y,z) = 1 - y + x^2 + \frac{1}{2}y^2 - x^2y - \frac{1}{6}y^3 + z^3$
- ☐ $p_3(x,y,z) = 1 - y + 2x^2 + y^2 - x^2y - \frac{1}{6}y^3 + z^3$
- ☐ $p_3(x,y,z) = 1 - y + x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 + z^3$
- ☐ $p_3(x,y,z) = 1 - y + \frac{1}{2}y^2 - x^2y - \frac{1}{6}y^3$

Question [SCQ-07] : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x-1)^2\cos(y) + \ln(y) \ .$$

Soit $g(x)$ la fonction définie dans un voisinage de $x = 1$ implicitement par $g(1) = 1$ et $f(x,g(x)) = 0$. Alors :

- ■ $g'(1) = 0$ et $g''(1) = -2\cos(1)$
- ☐ $g'(1) = 0$ et $g''(1) = 2\cos(1)$
- ☐ $g'(1) \neq 0$
- ☐ $g'(1) = g''(1) = 0$

Question [SCQ-08] : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_x^{3x} e^{xe^t}\,\mathrm{d}t\ .$$

Alors :

- ■ $f'(0) = 2$
- □ $f'(0) = 4$
- □ $f'(0) = 0$
- □ $f'(0) = 3$

Question [SCQ-09] : Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = x + z$. Alors le minimum m et le maximum M de f sous les contraintes $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ et $x + 2z - 1 = 0$ sont :

- ■ $m = \dfrac{1}{5}$ et $M = 1$
- □ $m = -\dfrac{1}{5}$ et $M = 1$
- □ $m = -1$ et $M = \dfrac{1}{5}$
- □ $m = -1$ et $M = -\dfrac{1}{5}$

Question [SCQ-10] : Soit $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 2,\ z \ge 0\big\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

vaut :

- ■ $\dfrac{\pi}{4}$
- □ $\dfrac{\pi}{2}$
- □ $\dfrac{3\pi}{4}$
- □ $\dfrac{3\pi}{8}$

Question [SCQ-11] : Soit $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le y\,e^{-x} \le 4,\ 4 \le y\,e^{x} \le 9\big\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D y\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

vaut :

- ■ $\dfrac{15}{2}$
- □ $\ln(4)\,\big(\ln(9) - \ln(4)\big)$
- □ 18
- □ $\dfrac{273}{4}$

Question [SCQ-12] : Soit $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0,\ y > 0\big\}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = x^{(y^z)}$,

$$\Gamma(f) = \{((x,y,z),t) \in D \times \mathbb{R} \colon t = f(x,y,z)\}$$

le graphe de f et $a = (1,1,1) \in D$. Alors l'équation de l'hyper-plan tangent au graphe de f au point $(a, f(a)) \in \Gamma(f)$ est :

- ■ $t - x = 0$
- □ $t - 1 + x - y = 0$
- □ $t - x - 1 = 0$
- □ $t - x - 1 - y = 0$

Question [SCQ-13] : Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies par

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy + xz + yz \\ x(y-z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(u,v) = \begin{pmatrix} u^3 + v^2 \\ 2v \\ 3u \end{pmatrix}.$$

Alors on a la matrice jacobienne suivante :

- ■ $J_{g\circ f}(1,1,0) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
- □ $J_{g\circ f}(1,1,0) = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ -12 & 2 \end{pmatrix}$
- □ $J_{f\circ g}(1,0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -12 & 2 \end{pmatrix}$
- □ $J_{f\circ g}(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Question [SCQ-14] : Soit $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le x \le y+z,\ 0 \le y \le z,\ 0 \le z \le \frac{\pi}{2}\right\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D \sin(x+y+z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

vaut :

- ■ $\frac{1}{2}$
- □ 0
- □ $\sin(y+z)$
- □ 1

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question [TF-01] : Une union quelconque de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

□ VRAI ■ FAUX

Question [TF-02] : Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ et soit $(p_k)_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de D. Alors il existe une sous-suite $\left(p_{k_j}\right)_{j\geq 0}$ qui converge vers un élément de D.

□ VRAI ■ FAUX

Question [TF-03] : Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction qui est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$. Alors la restriction de f à un sous-ensemble compact non-vide de $\mathbb{R}^n$ est une fonction continue.

■ VRAI □ FAUX

Question [TF-04] : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\lim\limits_{t\to 0+} f(t,t) = 0$. Alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

■ VRAI □ FAUX

Question [TF-05] : L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 :\ -2 < x < 1\}$ est connexe par arcs.

■ VRAI □ FAUX

Question [TF-06] : Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Alors le gradient de f existe et est non nul en tout point de $\mathbb{R}^n$.

□ VRAI ■ FAUX

Question [TF-07] : Soit $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ et soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un point tel que $F(x_0,y_0) = 0$, et $\det\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 et une fonction $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ telle que $y_0 = f(x_0)$ et, $\forall x \in U,\ F(x, f(x)) = 0$.

■ VRAI □ FAUX

Question [TF-08] : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = |y|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}}$ si $y \neq 0$ et $f(x,0) = 0$. Alors, pour tout point $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, admet, dans tout voisinage de x_0 suffisamment petit, exactement une solution $y(x)$.

■ VRAI □ FAUX

Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Vos réponses doivent être soigneusement justifiées et toutes les étapes de votre raisonnement doivent y figurer. Utiliser un **stylo** à encre **noir ou bleu foncé**.

Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Tourner les pages ! Cette section contient 3 questions à 10 points chacune !

Question 23: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ■10 *Réservé au correcteur*

Soient

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

et la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = -x\,z + y^2 - 2y.$$

(a) Trouver tous les points stationnaires de f dans $\mathring{D}$, *i.e.* dans l'intérieur de D, et déterminer leur nature (maximum local, minimum local ou point selle).

(b) Trouver, en justifiant en détail la démarche, l'image de la fonction f, c'est-à-dire déterminer l'ensemble $I = \{t \in \mathbb{R} \colon \exists\,(x, y, z) \in D \text{ tel que } t = f(x, y, z)\}$.

(c) Trouver, en justifiant en détail la démarche, l'image de la restriction de la fonction f à l'ensemble

$$D_+ = \{(x, y, z) \in D \colon z \geq -1\}$$

c'est-à-dire déterminer l'ensemble $I_+ = \{t \in \mathbb{R} \colon \exists\,(x, y, z) \in D_+ \text{ tel que } t = f(x, y, z)\}$.

Question 24: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ■ 10 *Réservé au correcteur*

Soit l'équation différentielle pour une fonction $y(x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$y' = 4x^3y^2 \ .$$

Trouver, pour chaque point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ donné, la solution maximale telle que $y(x_0) = y_0$.

Question 25: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ■10 *Réservé au correcteur*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\| \ \|$ une norme quelconque de $\mathbb{R}^n$ et V l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ équipé de la norme $\| \ \|_V$, définie pour $A \in V$ par :

$$\|A\|_V = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} .$$

Notons par $X + Y$ la somme et par XY le produit de deux matrices $X, Y \in V$, par A^{-1} l'inverse d'une matrice inversible $A \in V$, et par

$$\mathcal{B}(A, r) = \{X \in V \colon \|A - X\|_V < r\}$$

la boule ouverte de centre $A \in V$ et rayon $r > 0$. Soit de plus, pour $B \in V$ telle que $\|B\|_V < 1$, la suite de matrices $(C_k)_{k \geq 0}$ définie par $C_k = \sum_{l=0}^{k} B^l$, où $B^0 = I$ avec I la matrice identité de V.

(a) Donner la définition d'un sous-ensemble ouvert de V.

(b) Montrer, en partant de la définition de la norme $\| \ \|_V$, que pour tout $X, Y \in V$, $\|XY\|_V \leq \|X\|_V \|Y\|_V$.

(c) Montrer que pour tout $A \in V$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $\left\|A^k\right\|_V \leq \|A\|_V^k$.

(d) Montrer que la suite $(C_k)_{k \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans V.

(e) Montrer que $\lim_{k \to \infty} ((I - B)\, C_k) = I$.

(f) Montrer que pour tout $A \in V$ la fonction $f_A \colon V \to V$ définie par $f_A(X) = AX$ est continue sur V.

(g) Montrer que la matrice $I - B$ est inversible et que $(I - B)^{-1} = \lim_{k \to \infty} C_k$.

(h) Quelles sont les matrices de $\mathcal{B}(I, 1)$ qui sont inversibles?