Corrigé série 29

Exercice 1. On considère la conique d'équation

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 10x + 4 = 0.$$

On va voir que cette équation décrit une ellipse. On procède comme dans l'Exemple 2.3 des notes "Les Sections Coniques". La matrice $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ admet 9 (et 4) comme valeurs propres. Un vecteur donc possible est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc on choisit la base orthonormée $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Effectuons donc le changement de variables $x = \frac{1}{\sqrt{5}}u + \frac{2}{\sqrt{5}}v$ et $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}u + \frac{1}{\sqrt{5}}v$. Alors, l'équation de la conique devient

$$9u^2 - 2\sqrt{5}u + 4v^2 - 4\sqrt{5}v + 4 = 0,$$

ou bien, en complétant le carré,

$$9\left(u - \frac{\sqrt{5}}{9}\right)^2 + 4\left(v - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{14}{9}$$

Il s'agit de l'équation d'une ellipse.
Remarque : L'équation obtenue dépend du choix des vecteurs propres choisis.
Le changement de variables $X = u - \frac{\sqrt{5}}{9}$ et $Y = v - \frac{\sqrt{5}}{2}$ place l'ellipse à l'origine pour que le grand axe et l'axe court soient vertical et horizontal, respectivement. On obtient l'équation

$$9X^2 + 4Y^2 = \frac{14}{9}$$

ou encore sous forme canonique :

$$\frac{X^2}{\frac{14}{81}} + \frac{Y^2}{\frac{7}{18}} = 1$$

On voit que les demi-axes sont de longueur $a = \sqrt{\frac{14}{81}}$ et $b = \sqrt{\frac{7}{18}}$. (C'est vrai dans les coordonnées uv et dans les coordonnées xy, comme on a obtenu les coordonnées uv par une transformation linéaire *orthogonale*.)
De plus, cette ellipse est centrée en $(0; 0)$ dans les coordonnées XY. En faisant le changement de

variables inverse, on trouve qu'elle est centrée en $(U,V) = \left(\frac{\sqrt{5}}{9}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ dans les coordonnées uv.
Ainsi, dans les coordonnées xy originales, l'ellipse est centrée en $(X,Y) = \left(\frac{10}{9}, \frac{5}{18}\right)$.
Dans les coordonnées (X,Y), les foyers sont $(0, \pm\sqrt{b^2-a^2}) = \left(0, \pm\sqrt{\frac{35}{162}}\right)$ car $c = \sqrt{\frac{35}{162}}$.
En utilisant les relations entre X, Y, u, v, x, y, on peut trouver les foyers dans les coordonnées xy, qui sont

$$\left(\frac{10}{9} \pm \frac{\sqrt{14}}{9}, \frac{5}{18} \pm \frac{\sqrt{14}}{18}\right).$$

Exercice 2. On procède exactement comme dans l'Exercice 1. On considère la conique d'équation

$$x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 16 = 0.$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}$ admet comme valeurs propres 16 (et -4). On choisit par exemple les vecteurs propres (normalisés) $\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Donc, le changement de variables $x = -\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v$ et $y = \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2}v$ place un axe de l'ellipse horizontalement. Dans les coordonnées uv, l'équation de la conique devient

$$4u^2 - v^2 + 4 = 0,$$

ou bien

$$\frac{v^2}{4} - u^2 = 1.$$

Dans cette forme, il est clair que la conique est une hyperbole. (Alternativement, on peut déduire ça du discriminant de l'équation en termes de xy.) Évidemment, $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{5}$. De plus, l'hyperbole est centrée en l'origine en termes de uv.

On peut calculer que, en termes de xy, le centre est en $(0,0)$; les foyers se trouvent en $\left(\pm\frac{\sqrt{15}}{2}, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$; les sommets se trouvent en $(\pm\sqrt{3}, \pm 1)$.

Exercice 3. Effectuons le changement de variables suivant : $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(y+z)$, $v = x$, $w = \frac{1}{\sqrt{2}}(y-z)$. Note en particulier que u, v sont orthogonaux et de longueur 1. L'intersection du cylindre $x^2+y^2 = 1$ et du plan $y = z$ est contenu dans le plan uv. Dans le plan uv, il est trivial que $w = y - z = 0$. Donc,

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + z + (y - z)) = \sqrt{2}y,$$

et l'équation de cette intersection en termes de u, v devient

$$1 = x^2 + y^2 = v^2 + \frac{u^2}{2}.$$

Ainsi, $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\} \cap \{(x, y, z) : y = z\}$ est une ellipse.
Le centre se trouve évidemment en $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Dans les coordonnées u, v, w, les sommets se trouvent en

$$(u, v, w) \in \{(\pm\sqrt{2}, 0, 0), (0, \pm 1, 0)\}.$$

Dans les coordonnées originales x, y, z, on trouve que les sommets se trouvent en

$$(x, y, z) \in \{(\pm 1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, -1, -1)\}.$$

De plus, les foyers en termes de u, v, w se trouvent en

$$(u, v, w) \in \{(\pm 1, 0, 0)\}.$$

Par conséquent, les foyers en termes de x, y, z se trouvent en

$$(x, y, z) \in \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}.$$

Exercice 4.

a) **Faux.** Une conique est certes l'intersection d'un plan et d'un cône de révolution. Toutefois, suivant l'orientation du plan par rapport au cône, on peut obtenir une droite ou une paire de droites. Par contre, on n'obtient jamais l'ensemble vide.

b) **Faux.** L'intersection d'un plan et d'une sphère peut être un cercle, donc une conique.

c) **Faux.** En coupant un cône de révolution d'axe Oz avec un plan contenant l'axe Oz, on obtient une paire de droites sécantes. Ou encore, en faisant tourner une droite perpendiculaire à Oz autour de l'axe Oz, on obtient un "cône de révolution" dégénéré dont l'intersection avec un plan vertical est une droite.

d) **Vrai.** Regarde le discriminant Δ, qui est plus grand que 0.

e) **Faux.** Cette équation décrit deux lignes parallèles.

f) **Faux.** Il n'y a qu'un foyer, $(0, 0)$, comme cette ellipse est en fait un cercle.

Exercice 5.

a) On calcule que $\Delta < 0$, donc c'est une ellipse. Comme il n'y a pas de termes en xy, on peut directement compléter les carrés :

$$16(x-2)^2+25(y+3)^2-64-225-111=0 \Leftrightarrow 16(x-2)^2+25(y+3)^2=400 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+3)^2}{16}=1.$$

Cette équation décrit une ellipse centrée en $(2,-3)$. Les foyers sont $(-1,-3)$ et $(5,-3)$. Le demi-axe vertical est de longueur 4 ; le demi-axe horizontal est de longueur 5.

b) On calcule que $\Delta < 0$, donc c'est une ellipse. On a

$$5(x-5)^2+(y+4)^2-125-64+121=0 \Leftrightarrow 5(x-5)^2+(y+4)^2=20 \Leftrightarrow \frac{(x-5)^2}{4}+\frac{(y+4)^2}{20}=1.$$

Cette équation décrit une ellipse centrée en $(5,-4)$. Les foyers se trouvent en $(5,-8)$ et $(5,0)$. Le demi-axe vertical est de longueur $2\sqrt{5}$; le demi-axe horizontal est de longueur 2.

c) On calcule que $\Delta > 0$, donc c'est une hyperbole. On a

$$9(x-3)^2-16(y+4)^2-81+256-319=0 \Leftrightarrow 9(x-3)^2-16(y+4)^2=144 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+4)^2}{9}=1.$$

C'est une hyperbole dont les sommets sont $(-1,-4)$ et $(7,-4)$. Les foyers se trouvent en $(-2,-4)$ et $(8,-4)$. Le demi-axe de longueur 4 est supporté par la droite horizontale $d : y=-4$.

d) On a

$$4(x-3)^2-9(y+4)^2-36+144-108=0 \Leftrightarrow 4(x-3)^2-9(y+4)^2=0 \Leftrightarrow 3(y+4)=\pm 2(x-3).$$

Cette équation décrit la réunion des lignes $y=\frac{2}{3}x-6$ et $y=-\frac{2}{3}x-2$.

e) Cette équation décrit une parabole dont le sommet est $(-1,-3)$. Le foyer se trouve en $\left(-1,-\frac{45}{16}\right)$, donc le demi-axe vertical est de longueur $\dfrac{3}{16}$ et la directrice est $y=-\dfrac{51}{16}$.

f) Cette équation se factorise comme $(x+3)(x-2)=0$. Donc, l'espace de solutions est la réunion des lignes $x=-3$ et $x=2$.

Exercice 6.

a) Si $x=0$, il vient $y^2-z^2=1$. Ces deux équations réunies décrivent dans le plan Oyz une hyperbole de sommets $(x,y,z)=(0,\pm 1,0)$, d'asymptotes $\begin{cases} x=0 \\ y=\pm z \end{cases}$ et de foyers $(0,\pm\sqrt{2},0)$.

b) Si $x=1$, il vient $y^2=z^2$. Ces équations décrivent les droites $\begin{cases} x=1 \\ y=\pm z \end{cases}$ dans le plan $x=1$.

c) Si $z=h$, alors $x^2+y^2=1+h^2$, ce qui décrit dans le plan $z=h$ un cercle centré en $(x,y,z)=(0,0,h)$ de rayon $\sqrt{1+h^2}$.

Exercice 7. On considère l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Évidemment, $a = 2\sqrt{5}$ et $b = 2$. Les foyers se trouvent en $(\pm 4, 0)$. Donc, la longueur d'une diagonale d'un tel rectangle est 8. On doit trouver des points $A = (x, y)$ et $B = (-x, -y)$ dans l'ellipse tels que la distance entre A et B soit 8. En d'autres termes,

$$8 = \sqrt{(x - (-x))^2 + (y - (-y))^2},$$

ou bien,

$$64 = 4x^2 + 4y^2.$$

Par conséquent, $x^2 = 16 - y^2$. Comme (x, y) est sur l'ellipse,

$$(16 - y^2) + 5y^2 = 20.$$

On trouve que $(x, y) = (\sqrt{15}; 1)$ ou $(x, y) = (-\sqrt{15}; 1)$ est sur le rectangle. On peut prendre $(x, y) = (\sqrt{15}; 1)$. Alors, un côté du rectangle a comme longueur

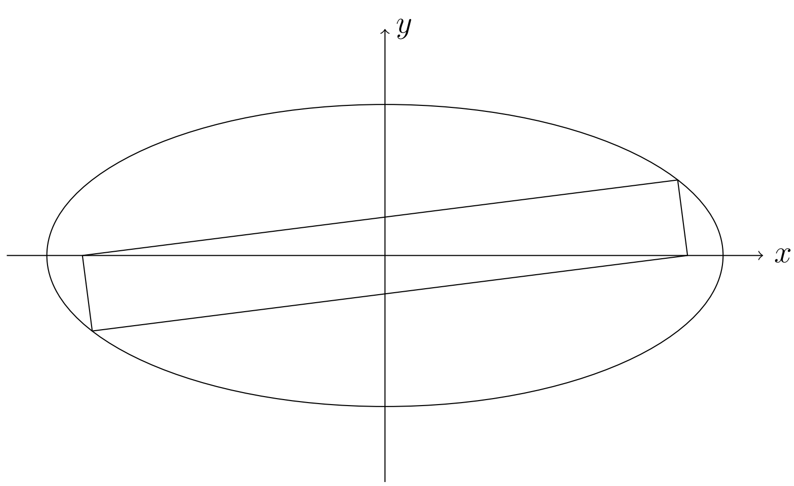
$$\sqrt{(\sqrt{15} - 4)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{32 - 8\sqrt{15}}$$

et un autre côté du rectangle a comme longueur

$$\sqrt{(\sqrt{15} + 4)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{32 + 8\sqrt{15}}.$$

L'aire du rectangle est donc

$$\sqrt{32 - 8\sqrt{15}}\sqrt{32 + 8\sqrt{15}} = \sqrt{64} = 8.$$



Exercice 8. Sous l'application diag(a, b), un point $(x; y)$ est envoyé sur $(ax; by)$.
Le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ est envoyé sur la courbe d'équation $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$.

— Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on obtient l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{\frac{1}{a^2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{b^2}} = 1$$

— Si $a = b = 0$, l'image du cercle est réduite à un point.

— Si $a = 0, b > 0$, le cercle est envoyé sur le segment vertical $\{(0, y) : |y| \leq b\}$.

— Si $a > 0, b = 0$, le cercle est envoyé sur le segment horizontal $\{(x, 0) : |x| \leq a\}$.

Exercice 9. Par symétrie, on peut supposer que $c > 0$ (si $c = 0$, la question n'est pas bien définie). Soit $C = (x, y)$. Si $y = 0$, la condition est satisfaite pour tout C.

Maintenant, supposons que $y \neq 0$. Si la condition $\sin\alpha = \tan\beta$ est satisfaite, il faut que $x \neq c$. En utilisant les définitions de sin et tan, on trouve que

$$\frac{y}{\sqrt{(c+x)^2 + y^2}} = \frac{y}{c - x}.$$

On trouve facilement que

$$x = -\frac{1}{4c}y^2.$$

C'est une parabole qui est ouverte à gauche si $c > 0$ et à droite si $c < 0$.
Le foyer se trouve en $(-c, 0)$. Le sommet se trouve en $(0, 0)$.