Corrigé Test 6 - Géométrie 5 juin 2024

Exercice 1. *(3 + 4 + 3 + 5 + 5 = 20 points)*

Relativement à un repère orthonormé de l'espace, On considère deux sphères Σ_1 et Σ_2 , ainsi que le plan π donnés par :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &: \quad x^2+y^2+z^2-4x+2z-20=0 \\ \Sigma_2 &: \quad (x-5)^2+(y+6)^2+(z-5)^2=52 \\ \pi &: \quad 3x-4y+5=0 \end{aligned}$$

a) Déterminer les coordonnées des centres C_1 et C_2 ainsi que les longueurs des rayons r_1 et r_2, respectivement des sphères Σ_1 et Σ_2.

$(\Sigma_1) : x^2-4x+4+y^2+z^2+2z+1=25 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2+y^2+(z+1)^2=25$

$$\Rightarrow \boxed{C_1(2;0;-1) \quad r_1=5 \text{ u} \quad \text{et} \quad C_2(5;-6;5) \quad r_2=2\sqrt{13} \text{ u}}$$

b) Déterminer une équation cartésienne du plan α perpendiculaire à π et contenant la droite (C_1C_2).

$$\overrightarrow{C_1C_2}=\begin{pmatrix}5-2\\-6-0\\5+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6\\6\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{d}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 3 \\ y & -2 & -4 \\ z+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8(x-2)+6y+2(z+1)=0$$

$$\Rightarrow \quad 4(x-2)+3y+z+1=0 \quad \Rightarrow \boxed{(\alpha):\ 4x+3y+z-7=0}$$

c) Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans parallèles à π et tangents à Σ_1.

plans parallèles à π : $(\beta):\ 3x-4y+d=0$

$$\delta(C_1;\beta)=5 \quad \Rightarrow \quad \frac{|6+d|}{5}=5 \quad \Rightarrow \quad |6+d|=25 \quad \Rightarrow 6+d=\pm 25$$

$$\Rightarrow \quad d_1=19 \quad \text{et} \quad d_2=-31$$

$$\Rightarrow \boxed{(\beta_1):\ 3x-4y+19=0 \quad \text{et} \quad (\beta_2):\ 3x-4y-31=0}$$

d) Déterminer une équation cartésienne de la sphère Σ_3 passant par les points C_1 et C_2 et dont le centre appartient à la droite d d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x=-1+k \\ y=-6-2k \\ z=\ \ 2-4k \end{cases}$$

M milieu de C_1 et $C_2 \quad \Rightarrow \quad M(\frac{7}{2};-3;2)$

α plan médiateur de C_1 et $C_2 \quad \Rightarrow \quad (\alpha):\ x-2y+2z+d=0$

$$M\in\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{2}+6+4+d=0 \quad \Rightarrow \quad d=-\frac{27}{2}$$

$\Rightarrow \quad (\alpha): \ 2x - 4y + 4z - 27 = 0$

$d \cap \alpha \quad \Rightarrow \quad -2 + 2k + 24 + 8k + 8 - 16k - 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad -6k = -3 \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad C_3(-\frac{1}{2}; -7; 0) \quad \Rightarrow \quad (\Sigma_3): \ (x + \frac{1}{2})^2 + (y + 7)^2 + z^2 = r_3^2$

$C_1 \in \Sigma_3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{25}{4} + 49 + 1 = r_3^2 \quad \Rightarrow \quad r_3^2 = \dfrac{225}{4}$

$\Rightarrow \boxed{(\Sigma_3): \ \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + (y + 7)^2 + z^2 = \dfrac{225}{4}}$

e) Soit γ le cercle d'intersection de Σ_1 et Σ_2. Calculer les coordonnées de son centre C et la longueur de son rayon r.

$$(C_1C_2): \begin{cases} x = 2 + m \\ y = -2m \\ z = -1 + 2m \end{cases} \qquad \text{avec } m \in \mathbb{R}$$

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2: \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2z + 20 \\ x^2 - 10x + 25 + y^2 + 12y + 36 + z^2 - 10z + 25 = 52 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad -10x + 12y - 10z + 86 + 4x - 2z + 20 = 52 \quad \Rightarrow \quad -6x + 12y - 12z + 54 = 0$

$\Rightarrow \quad (\gamma): \ x - 2y + 2z - 9 = 0$

$\gamma \cap (C_1C_2): \Rightarrow \quad 2 + m + 4m - 2 + 4m - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 9m = 9 \quad \Rightarrow \quad m = 1 \quad \Rightarrow \boxed{C(3; -2; 1)}$

$$\overrightarrow{C_1C} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ -2 - 0 \\ 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\overrightarrow{C_1C}\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3 \Rightarrow \quad r = \sqrt{5^2 - 3^2} = \boxed{4}$$

Exercice 2. *(6 + 2 = 8 points)*

a) Enoncer et démontrer la formule de calcul de la distance entre deux droites gauches $a = (A, \vec{u})$ et $b = (B, \vec{v})$.

$$\delta(a; b) = \frac{|\,\overrightarrow{AB} \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v})\,|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

Soit a' la parallèle à a passant par B et b' la parallèle à b passant par A.

Le parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \vec{u}$ et $\vec{v}$ a pour volume $|\,\overrightarrow{AB} \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v})\,|$.

Il a pour faces parallèle les plans $\alpha = (A, \vec{u}, \vec{v})$ et $\beta(A, \vec{u}, \vec{v})$ dont la distance vaut

$$\delta(\alpha, \beta) = \frac{\text{volume du parallélépipède}}{\text{aire des faces } \alpha \text{ et } \beta} = \frac{|\,\overrightarrow{AB} \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v})\,|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

Reste à montrer qu'il existe deux points $A' \in a$ et $B' \in b$ tels que $\|\overrightarrow{A'B'}\| = \delta(\alpha, \beta)$

Considérons la droite p, perpendiculaire aux plans α et β et passant par A.

Elle coupe β en un point C. La parallèle à a passant par C coupe la droite b en B' et la parallèle à p passant par B' coupe a en A'.

b) Quelle est la formule de calcul de cette distance si les droites a et b sont parallèles ?

Si a et b sont parallèles, $\quad \delta(a; b) = \delta(B; a) = \dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \delta(A; b) = \dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$

Exercice 3. *(2 + 2 + 2 + 2 = 8 points)*

Dans un repère orthonormé, on donne les droites a et b par leurs équations matricielles

$$a\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les coordonnées des points $A \in a$ et $B \in b$ les plus proches l'un de l'autre.

Puisque $A \in a$ et $B \in b$, $\quad \overrightarrow{AB} = n \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Puisque les points A et B sont le plus proches l'un de l'autre, $\overrightarrow{AB} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AB} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2n - 10k - 18 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3n + 2k + 1 = 0$$

En résolvant le système d'équations, on obtient $k = -2$ et $n = 1$.

Ainsi, $\quad A(-1; -2; 1)$ et $B(2; -1; 5)$

Exercice 4. *(2 + 8 + 3 + 5 = 18 points)*

On considère la conique d'équation $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 12\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 28 = 0$.

a) De quel type de coniques s'agit-il ? Justifier la réponse par un seul calcul !

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - ac = (-1)^2 - 3 \cdot 3 = -8 < 0$, donc c'est une ellipse.

b) Effectuer un changement de variables (qu'on appelle u et v) pour éliminer le double produit xy, en explicitant les différentes étapes.

On cherche les valeurs propres puis les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)^2 - 1 = (2 - \lambda)(4 - \lambda)$ d'où les valeurs propres 2 et 4.

On calcule facilement que $E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et $E_4 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

En normalisant les vecteurs propres, on pose $\overrightarrow{f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

qui forment bien une base orthonormée.

On obtient alors le changement de variables $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v)$ et $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v)$.

En remplaçant dans l'équation de base et en simplifiant, il vient

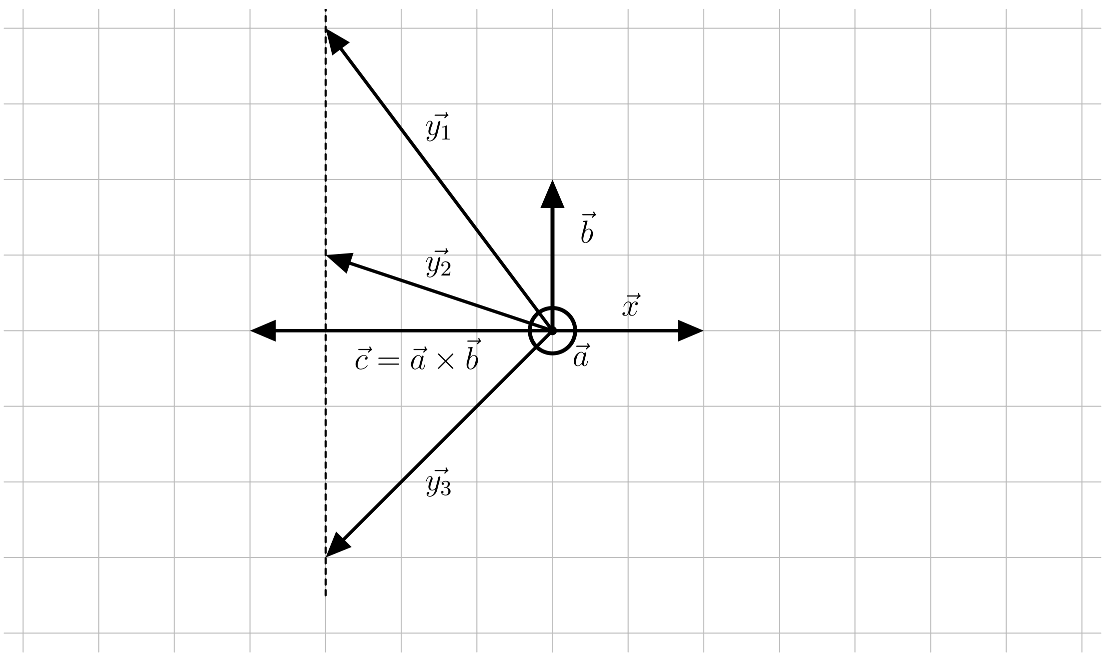
$$2u^2 + 4v^2 - 16u + 8v + 28 = 0.$$

c) Effectuer un changement de variables (qu'on appelle X et Y) pour amener l'équation de la conique sous forme canonique.
On complète les carrés :
$2u^2 - 16u = 2(u^2 - 8u) = 2(u-4)^2 - 2 \cdot 16$ et $4v^4 - 16v = 4(v^2 + 2v) = 4(v+1)^2 - 4 \cdot 1$.
On pose alors $X = u - 4$ et $Y = v + 1$.
On remplace dans l'équation et on simplifie pour obtenir l'équation $2X^2 + 4Y^2 = 8$.
On a donc l'équation canonique $\dfrac{X^2}{4} + \dfrac{Y^2}{2} = 1$, qui est bien l'équation d'une ellipse.

d) Déterminer la longueur des axes et l'excentricité de la conique.
Calculer son centre dans les coordonnées originales $(x; y)$.
La longueur du grand axe $2a = 2 \cdot \sqrt{4} = 4$ et celle du petit axe $2b = 2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
Ainsi, l'excentricité vaut $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Avec les coordonnées $(X; Y)$, l'ellipse est centrée en $(0; 0)$.
En effectuant les changements de coordonnées à l'envers, on trouve le centre $(4; -1)$ dans les coordonnées $(u; v)$ puis finalement le centre $\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}; \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ dans les coordonnées $(x; y)$.

Exercice 5. *(2 + 2 + 3 = 7 points)*

Le quadrillage ci-dessous est une vue de face d'un plan α perpendiculaire au vecteur $\vec{a}$, qui pointe en direction de l'observateur. Le vecteur $\vec{b}$ se situe dans le plan α.



Sachant que $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 2$, représenter graphiquement

a) le vecteur $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$;

b) un vecteur $\vec{x}$ du plan α tel que $\vec{a} \times \vec{x} = 2\,\vec{b}$;
s'il y a plusieurs solutions, en représenter trois en les nommant $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ et $\vec{x_3}$.

c) un vecteur $\vec{y}$ du plan α tel que $\vec{b} \times \vec{y} = 3\,\vec{a}$.
s'il y a plusieurs solutions, en représenter trois en les nommant $\vec{y_1}, \vec{y_2}$ et $\vec{y_3}$.