Test 6 - Géométrie 5 juin 2024

Nom: ____________________ Prénom: ____________________

Le test dure 105 minutes. Le détail des calculs doit être rédigé de manière claire.

Exercice 1. *(20 points)*

Relativement à un repère orthonormé de l'espace, On considère deux sphères Σ_1 et Σ_2 , ainsi que le plan π donnés par :

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_1 & : & x^2+y^2+z^2-4x+2z-20=0 \\ \Sigma_2 & : & (x-5)^2+(y+6)^2+(z-5)^2=52 \\ \pi & : & 3x-4y+5=0 \end{array}$$

a) Déterminer les coordonnées des centres C_1 et C_2 ainsi que les longueurs des rayons r_1 et r_2, respectivement des sphères Σ_1 et Σ_2.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan α perpendiculaire à π et contenant la droite (C_1C_2).

c) Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans parallèles à π et tangents à Σ_1.

d) Déterminer une équation cartésienne de la sphère Σ_3 passant par les points C_1 et C_2 et dont le centre appartient à la droite d d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = -1+k \\ y = -6-2k \\ z = 2-4k \end{cases}$$

e) Soit γ le cercle d'intersection de Σ_1 et Σ_2. Calculer les coordonnées de son centre C et la longueur de son rayon r.

Exercice 2. *(8 points)*

a) Enoncer et démontrer la formule de calcul de la distance entre deux droites gauches $a=(A,\vec{u})$ et $b=(B,\vec{v})$.

b) Quelle est la formule de calcul de cette distance si les droites a et b sont parallèles ?

Exercice 3. *(8 points)*

Dans un repère orthonormé, on donne les droites a et b par leurs équations matricielles

$$a\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les coordonnées des points $A \in a$ et $B \in b$ les plus proches l'un de l'autre.

Exercice 4. *(18 points)*

On considère la conique d'équation $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 12\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 28 = 0$.

a) De quel type de coniques s'agit-il ? Justifier la réponse par un seul calcul !

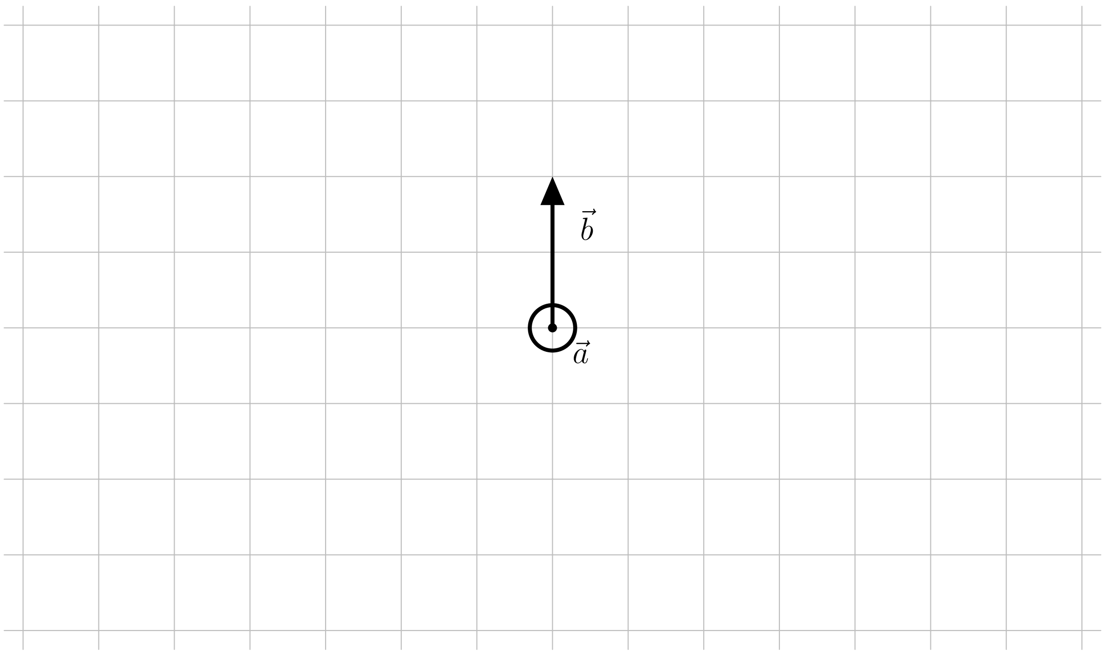
b) Effectuer un changement de variables (qu'on appelle u et v) pour éliminer le double produit xy, en explicitant les différentes étapes.

c) Effectuer un changement de variables (qu'on appelle X et Y) pour amener l'équation de la conique sous forme canonique.

d) Déterminer la longueur des axes et l'excentricité de la conique.
Calculer son centre dans les coordonnées originales $(x; y)$.

Exercice 5. *(7 points)*

Le quadrillage ci-dessous est une vue de face d'un plan α perpendiculaire au vecteur $\vec{a}$, qui pointe en direction de l'observateur. Le vecteur $\vec{b}$ se situe dans le plan α.



Sachant que $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 2$, représenter graphiquement

a) le vecteur $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$;

b) un vecteur $\vec{x}$ du plan α tel que $\vec{a} \times \vec{x} = 2\,\vec{b}$;
s'il y a plusieurs solutions, en représenter trois en les nommant $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ et $\vec{x_3}$.

c) un vecteur $\vec{y}$ du plan α tel que $\vec{b} \times \vec{y} = 3\,\vec{a}$.
s'il y a plusieurs solutions, en représenter trois en les nommant $\vec{y_1}, \vec{y_2}$ et $\vec{y_3}$.