Exercice 1.

a) La projection orthogonale sur Ox du vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Ainsi, $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et donc $\alpha = 45°$.

b) La projection orthogonale sur Oxy du vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Ainsi, $\cos(\alpha) = \dfrac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ et donc $\alpha \cong 35.26°$. On aurait pu s'attendre à obtenir le même résultat qu'en **a)**, mais le calcul montre que cette intuition est mal inspirée : un petit croquis en perspective cavalière devrait rétablir la bonne intuition.

Exercice 2. On a $\begin{pmatrix}4\\3\\8\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}7\\x\\y\end{pmatrix} = 28 + 3x + 8y = 0$ et $\begin{pmatrix}-5\\20\\9\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}7\\x\\y\end{pmatrix} = -35 + 20x + 9y = 0$. En résolvant le système formé de ces deux équations, on a $x = 4$ et $y = -5$. Ainsi, les coordonnées de $\vec{w}$ sont $\begin{pmatrix}7\\4\\-5\end{pmatrix}$.

Exercice 3. *Rappel* : L'équation — dite *réduite* — d'une droite peut s'écrire $y = mx + b$ où m est la pente et b l'ordonnée à l'origine. La pente s'obtient facilement du vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix}\Delta x\\\Delta y\end{pmatrix}$ en considérant $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

a) La pente vaut $m = -\frac{5}{3}$, et donc on a $4 = -\frac{5}{3}\cdot 3 + b \iff b = 9$ et donc l'équation est $y = -\frac{5}{3}x + 9$, en multipliant par 3 on obtient $5x + 3y - 27 = 0$.

b) Le vecteur directeur vaut $\vec{d} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ ainsi $m = \frac{4}{2} = 2$, $0 = 2\cdot 1 + b \iff b = -2$ et donc $y = 2x - 2$, c'est-à-dire $2x - y - 2 = 0$.

c) Il n'y a pas besoin de chercher le vecteur directeur car $m = 0$. Ainsi, on calcule l'ordonnée à l'origine $3 = 0\cdot(-5) + b \iff b = 3$ et une équation cartésienne est $y - 3 = 0$.

d) Utilisons le vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ de la droite cherchée, ainsi que le point $A = (4; 7)$: par le cours, on obtient $1\cdot x + 0\cdot y = 1\cdot 4 + 0\cdot 7$ et une équation cartésienne est $x - 4 = 0$.

Exercice 4.

a) Il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} 2x & +3y & +4 & = & 0 \\ -x & -\frac{3}{2}y & +1 & = & 0 \end{cases}$$

En soustrayant deux fois la première équation de la deuxième on obtient 2=0 et donc le système est impossible, ce qui signifie que les droites n'ont pas d'intersection, autrement dit elles sont parallèles.

b) Commençons par chercher l'équation cartésienne de la deuxième droite. On a $x = 1 - 2\lambda$ et $y = -2 + \lambda$, en substituant $\lambda = y + 2$ dans la première équation, on obtient $x = 1 - 2(y + 2) \iff x + 2y + 3 = 0$. Il s'agit donc deux fois de la même droite et l'intersection est la droite elle-même : $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y + 3 = 0\}$.

c) La résolution du système

$$\begin{cases} 2x & +3y & +1 & = & 0 \\ 2x & -3y & +1 & = & 0 \end{cases}$$

donne $x = -\frac{1}{2}$ et $y = 0$, les droites s'intersectent donc au point $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

d) Les équation cartésienne de ces droites sont $-2x + 3y - 1 = 0$ et $3x + 4y - 15 = 0$. La résolution du système

$$\begin{cases} -2x & +3y & -1 & = & 0 \\ 3x & +4y & -15 & = & 0 \end{cases}$$

donne $x = \frac{41}{17}$ et $y = \frac{33}{17}$, les droites s'intersectent donc au point $\left(\frac{41}{17}; \frac{33}{17}\right)$.

Exercice 5.

a) Avec M_{AB} et M_{AC} les points milieux de $[AB]$ et $[AC]$ respectivement, des équations paramétriques vectorielles sont par exemple

$$(m_B) : \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \lambda \cdot \overrightarrow{BM_{AC}} \qquad \text{et} \qquad (m_C) : \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AC} + \mu \cdot \overrightarrow{CM_{AB}} \qquad (\text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

b) Comme $\overrightarrow{BM_{AC}} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$, on obtient $(m_B) : \overrightarrow{AX} = (1-\lambda)\overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$, et de la même manière, $\overrightarrow{CM_{AB}} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ donne $(m_C) : \overrightarrow{AX} = (1-\mu)\overrightarrow{AC} + \frac{\mu}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$.

c) En soustrayant (m_C) à (m_B), on trouve

$$\overrightarrow{0} = \left(1 - \lambda - \tfrac{\mu}{2}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left(\tfrac{\lambda}{2} - 1 + \mu\right) \cdot \overrightarrow{AC}$$

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont linéairement indépendants, on a $1 - \lambda - \frac{\mu}{2} = 0$ et $\frac{\lambda}{2} - 1 + \mu = 0$, soit le système

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = 2 \\ \lambda + 2\mu = 2 \end{cases}$$

dont la solution est $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$. Le point d'intersection des médianes issues de B et C est aux $\frac{2}{3}$ de celles-ci depuis leur sommet respectif. Par permutation circulaire des sommets, on déduit que la médiane issue de C intersecte la médiane issue de A au même point : on retrouve le résultat de 1[re] année, à savoir que les médianes s'intersectent aux $\frac{2}{3}$ de celles-ci depuis les sommets, en un point appelé le *barycentre* du triangle.

Exercice 6. On utilise essentiellement le rappel de l'**Exercice 3**.

a) La pente vaut $m = -1/3$.

b) Un vecteur directeur de cette droite est $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -5-7 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}$ et donc la pente est $m = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$.

c) Une droite verticale a une pente indéterminée (ou par abus : $+\infty$, voire $-\infty$!).

d) Cette droite est donc horizontale et sa pente vaut $m = 0$.

e) On peut écrire cette droite $y = x$ et donc sa pente vaut $m = 1$.

Exercice 7. On note $\overrightarrow{n}_g = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}_h = \begin{pmatrix} 5t+1 \\ 4t \end{pmatrix}$ des vecteurs normaux respectifs de g et h.

a) Les droites sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{n}_g$ et $\overrightarrow{n}_h$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si $\det(\overrightarrow{n}_g; \overrightarrow{n}_h) = 0$:

$$(t+1)4t - (5t+1)t = 0 \qquad \text{qui donne} \qquad t(-t+3) = 0$$

dont les solutions sont $t = 0$ et $t = 3$. Ces deux valeurs sont les seules pour lesquelles g et h sont parallèles.

b) Pour que les droites soient confondues, il faut qu'elles soient parallèles, c'est-à-dire qu'il faut que $t = 0$ ou $t = 3$ par le point précéndent.

- Si $t = 0$, les équations $(g) : x = \frac{9}{4}$ et $(h) : x = 0$ décrivent deux droites verticales non confondues.
- Si $t = 3$, les équations $(g) : 4x + 3y + \frac{3}{4} = 0$ et $(h) : 16x + 12y + 3 = 0$ sont équivalentes (car $4 \cdot (g) = (h)$), et décrivent donc la même droite.

La seule valeur de t qui donne des droites confondues est $t = 3$.

c) Les droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, c'est-à-dire lorsque $\overrightarrow{n}_g \bullet \overrightarrow{n}_h = 0$:

$$(t+1)(5t+1) + 4t^2 = 0 \qquad \text{qui donne} \qquad (3t+1)^2 = 0$$

dont la solution $t = -\frac{1}{3}$ est la seule valeur pour laquelle les droites sont perpendiculaires.

Exercice 8. L'angle α entre les deux vecteur satisfait la relation $\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|}$. Un angle dans le cercle trigonométrique (mesuré depuis l'axe Ox) est aigu si et seulement s'il se trouve entièrement dans les premier ou quatrième quadrants autrement dit si son cosinus est strictement positif.

Exercice 9. Nommons c la droite d'équation $-2x + y = 11$, et d la droite d'équation $2x - y = -1$. Remarquons tout d'abord que les deux droites c et d sont parallèles car leurs vecteurs normaux sont colinéaires, si bien que ces deux droites supportent des côtés opposés du rectangle. Calculons les coordonnées des points d'intersection de la diagonale avec les droites c et d. Il s'agit de résoudre les systèmes

$$\begin{cases} -2x & +y & = & 11 \\ & y & = & 3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} 2x & -y & = & -1 \\ & y & = & 3 \end{cases}$$

La solution du premier est $x = -4$, $y = 3$, ce qui donne un sommet $A = (-4; 3)$, et la solution du deuxième donne un sommet $C = (1; 3)$. Trouvons à présent une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à la droite c et passant par le point A. Pour cela, on considère le vecteur normal $\vec{m} = -\vec{n_\perp} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, perpendiculaire au vecteur normal $\vec{n}$ de c. Ainsi, on obtient

$$1 \cdot x + 2 \cdot y = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 3 \iff x + 2y - 2 = 0$$

comme équation cartésienne de la droite perpendiculaire à la droite c et passant par le point A ; nommons cette droite e. On applique le même raisonnement pour trouver une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à la droite d et passant par le point C ; on trouve

$$x + 2y - 7 = 0$$

et on nomme cette droite f. Pour trouver les deux sommets restants du rectangle, on calcule les intersection des droites c et f ainsi que des droites d et e. On trouve respectivement les points $D = (-3; 5)$ et $B = (0; 1)$.

*Remarque. On aurait pu s'épargner les calculs de e et f et leurs intersection respectives avec d et c en exploitant la projections orthogonale de $\overrightarrow{AC}$ sur le vecteur normal $\vec{n}$ de c (comme à l'***Exercice 11** *plus loin). Par exemple,*

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \mathrm{proj}_{\vec{n}}(\overrightarrow{AC}) \qquad \textit{et} \qquad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \mathrm{proj}_{\vec{n}}(\overrightarrow{CA})$$

Exercice 10.

a) $\vec{v}' = \dfrac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \dfrac{22}{34}\vec{u}$; **b)** $\vec{v}' = \dfrac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \dfrac{0}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \vec{0}$; **c)** $\vec{v}' = \dfrac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \dfrac{13}{6}\vec{u}$.

Exercice 11. Nommons les points $P = (0; 5)$ et $Q = (5; 4)$ ainsi que les droites d'équations $(c)\ : 3x + 4y + 5 = 0$ et $(d)\ : 3y + 1 = 0$. Par la formule de la distance, on a

$$\delta(P; c) = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{25}{5} = 5 \qquad \text{et} \qquad \delta(Q; d) = \frac{|0 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 1|}{\sqrt{0 + 9}} = \frac{13}{3}$$

Pour le deuxième calcul, vu que la droite d est horizontale, il suffit de soustraire l'ordonnée à l'origine de la droite à la coordonnée y du point Q, ainsi $\delta(Q; d) = 4 - (-1/3) = 4 + 1/3 = 13/3$.

Exercice 12. Commençons par trouver la valeur de a. Puisque les droites données ne sont pas parallèles, elles supportent des côtés perpendiculaires du rectangle. Un vecteur normal de la 1[re] droite, appelons-la d_1, est $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ doit être perpendiculaire au vecteur normal $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ a \end{pmatrix}$ de la 2[e] droite d_2 : l'équation $\vec{n_1} \bullet \vec{n_2} = 0$ donne $a = 6$. On peut ensuite vérifier ensuite que les coordonnées de A ne satisfont aucune des deux équations, c'est-à-dire que A n'est sur aucune des deux droites.

Pour trouver l'aire, il suffit donc de multiplier les distances de A à chacune des droites données (ces distance correspondent aux longueurs de deux côtés adjacents) :

$$\delta(A; d_1) = \frac{|3 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} \qquad \text{et} \qquad \delta(A; d_2) = \frac{|4 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 + 14|}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = \frac{12}{2\sqrt{13}}$$

L'aire du rectangle vaut $\frac{13}{\sqrt{13}} \cdot \frac{12}{2\sqrt{13}} = 6$.

Exercice 13. Méthode longue. Commençons par trouver les équations cartésiennes des droites supportant les côtés du triangle $\triangle ABC$. Par des calculs identiques à ceux proposés au cours, on trouve que l'équation de la droite supportant le côté $[AB]$ est $d : x - 2y = -2$, celle supportant le côté $[BC]$ est $e : x - 5y = -11$ et celle supportant le côté $[CA]$ est $f : x - y = -3$. Pour s'y retrouver, voir la figure ci-dessous. Nous avons maintenant besoin des équations cartésiennes des hauteurs, c'est-à-dire des droites perpendiculaires aux droites d, e et f et passant respectivement par les sommets C, A et B du triangle. En utilisant les vecteurs directeurs de d, e et f comme vecteurs normaux des hauteurs, on trouve les équations respectives

$$(d') : \ 2x + y = 0 \ , \quad (e') : \ 5x + y = -21 \quad \text{et} \quad (f') : \ x + y = 7$$

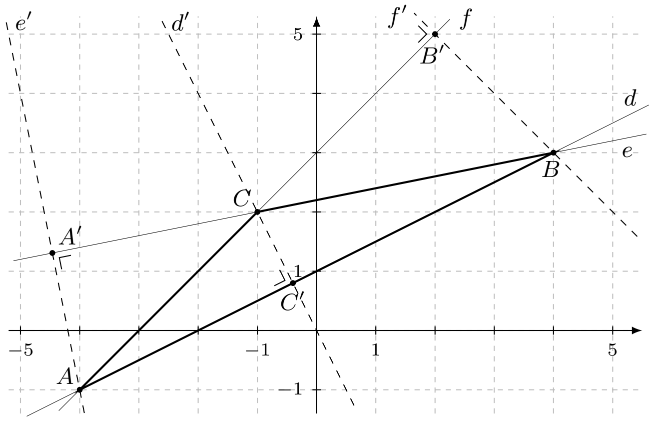
Calculons les intersections des paires de droites $(d; d')$, $(e; e')$ et $(f; f')$ afin d'obtenir les coordonnées des pieds C', A' et B' des hauteurs du triangle. Il faut résoudre les trois systèmes suivants :

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 5y = -11 \\ 5x + y = -21 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x - y = -3 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

dont les solutions sont respectivement $C' = (-2/5; 4/5)$, $A' = (-58/13; 17/13)$ et $B' = (2; 5)$.
L'orthocentre est l'intersection des hauteurs du triangle, il s'agit donc de résoudre le système formé des 3 équations cartésiennes des hauteurs (une équation est redondante) :

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x + y = -21 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

on trouve $H = (-7; 14)$ — qui est hors de la figure ci-dessous !



Méthode courte. Les pieds A', B', C' des hauteurs peuvent se trouver directement avec les projections orthogonales, par exemple :

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \text{proj}_{\overrightarrow{BC}}(\overrightarrow{BA}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{22}{13} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -58/13 \\ 17/13 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad A' = (-58/13; 17/13),$$

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC} + \text{proj}_{\overrightarrow{CA}}(\overrightarrow{CB}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad B' = (2; 5),$$

$$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \text{proj}_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{AC}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{9}{20} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad C' = (-2/5; 4/5).$$

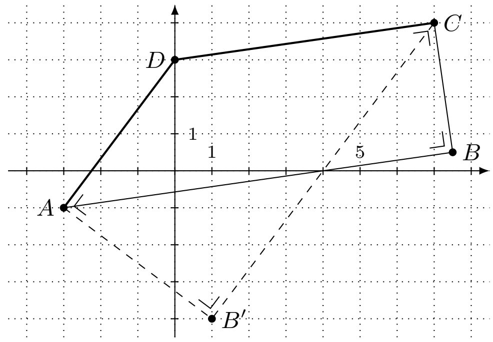
Pour trouver les coordonnées de l'orthocentre $H = (x; y)$, les conditions $\overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{BH} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$ (des droites de vecteurs normaux $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ et passant A et B respectivement) donnent le système linéaire de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} -5x - y = 21 \\ 3x + 3y = 21 \end{cases}$$

dont on déduit $H = (-7; 14)$.

Exercice 14.

a) Pour trouver tous les points B, on peut choisir $[AD]$ ou $[DC]$ comme une des bases du trapèze :



b) Avec par exemple $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$, on calcule $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \mathrm{proj}_{\overrightarrow{DC}}(\overrightarrow{AC}) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, donc $B = (15/2; 1/2)$.

Exercice 15.

a) Le point M est situé sur la droite $y = x$, ses coordonnées sont donc $M = (m; m)$.

b) Les coordonnées du point H sont $(m; 1)$ et celles du point K sont $(-1; m)$.

c) Trouvons les coordonnées du centre du cercle I et montrons que tous les points données sont à égale distance de ce point. Remarquons que $AHMK$ est un rectangle (au besoin, il suffit de vérifier que $AHMK$ est un parallélogramme dont un des angles est droit) :

$$\overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} m+1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ m-1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{KM} = \begin{pmatrix} m+1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AH}$$

Ainsi le point I se trouve à l'intersection des diagonales de ce rectangle, par exemple au milieu du segment $[HK]$: $I = \left(\frac{1}{2}(m-1); \frac{1}{2}(m+1)\right)$. Les points H et K se trouvent donc à une distance $r := \frac{1}{2}\|\overrightarrow{HK}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-m-1)^2 + (m-1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{m^2+1}$ du point I. Déterminons les distances à I des points O, A et M :
$\|\overrightarrow{OI}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(m-1)^2 + (m+1)^2} = r$;
$\|\overrightarrow{AI}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(m+1)^2 + (m-1)^2} = r$;
$\|\overrightarrow{MI}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(-m-1)^2 + (-m+1)^2} = r$. Ainsi ces points se trouvent bien sur le cercle de centre I.

d) Les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{HK}$ sont perpendiculaires

$$\overrightarrow{OI} \bullet \overrightarrow{HK} = \begin{pmatrix} (m-1)/2 \\ (m+1)/2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} (-1-m)/2 \\ (m-1)/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}((m-1)(-m-1) + (m+1)(m-1)) = 0$$

ce qui montre que les droites supports de ces vecteurs le sont aussi.