Exercice 1. On a $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{GF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EB} = \vec{0}$, ce qui montre que ces trois vecteurs sont coplanaires (l'un d'eux peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres).

Exercice 2. On a $A = (-2;-2)$, $B = (-2;-1)$, $C = (-2;1)$, $D = (-1/2;0)$, $E = (0;-2)$, $F = (1;-4/3)$, $G = (2;-2/3)$, $H = (3;0)$, $I = (5/2;3/2)$ et $J = (3;2)$.

Exercice 3. Le centre de gravité se trouve à l'intersection des médianes du triangle. Considérons le milieu M du segment $[BC]$, alors d'après le cours,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

Comme le centre de gravité G est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet correspondant, on a aussi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1+b_1+c_1}{3} \\ \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3} \end{pmatrix}, \qquad \text{c'est-à-dire } G = \left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right).\end{aligned}$$

Exercice 4. Par l'exercice précédent, on a $G = (5/3;-2/3)$. Pour trouver graphiquement le centre de gravité, on construit le milieu D de $[AB]$, et le milieu E de $[AC]$. Le centre de gravité G se trouve alors à l'intersection des droites BE et DC. On peut ensuite mesurer les coordonnées de G.

Exercice 5. Soient $(c_1;c_2)$ les coordonnées du point C. Alors par l'exercice précédent on a $G = (3;4) = \left(\frac{4+c_1}{3}; \frac{5+c_2}{3}\right)$, et on en déduit $C = (5;7)$.

Exercice 6. Considérons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Si les quatre points sont coplanaires, ces trois vecteurs ne forment pas une base de V_3. Ainsi on peut utiliser la caractérisation des bases de V_3 par les déterminants (vu dans une série précédente) et calculer $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$. Ce déterminant est nul si et seulement si les vecteurs sont coplanaires — et donc les quatre points également. Or

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & -8 & -6 \\ -3 & 0 & -6 \\ -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0 - 48 - 54 - 0 - 18 + 120 = 0.$$

Exercice 7. Prenons comme base du tétraèdre la face sur le plan Oxy, c'est-à-dire le triangle de sommet $(0;0;0)$, $(3;0;0)$ et $(0;3;0)$. On utilise ensuite une proposition du cours pour calculer le centre de gravité G_1 de ce triangle :

$$G_1 = \left(\frac{0+3+0}{3}; \frac{0+0+3}{3}; 0\right) = (1;1;0)$$

Considérons maintenant le vecteur $\overrightarrow{AG_1}$, où $A = (0;0;3)$. Les coordonnées de ce vecteur sont $\overrightarrow{AG_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Grâce à la donnée, on peut ainsi calculer les coordonnées du centre de gravité G du tétraèdre de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AG_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Notons les points $A = (0;11;7)$, $B = (20;10;0)$, $C = (15;23;16)$ et $D = (15;2;19)$. Calculons un vecteur pour chaque arête du tétraèdre :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 20 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 19 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -21 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On vérifie que la norme de chacun de ces vecteurs vaut $\sqrt{450} = 15\sqrt{2}$, et donc le tétraèdre est bien régulier.

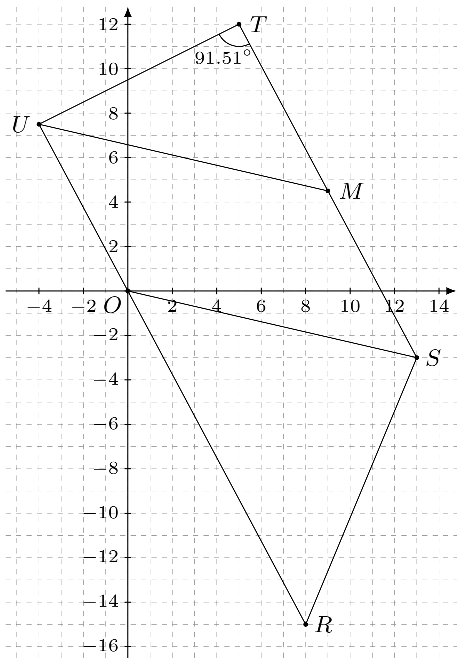
Exercice 9.

a) Pour le vérifier, calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{UM}$ et $\overrightarrow{OS}$, ils doivent être colinéaires, de même que les vecteurs $\overrightarrow{OU}$ et $\overrightarrow{SM}$.

Premièrement calculons les coordonnées du point M : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + 1/2\overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9/2 \end{pmatrix}$. Ainsi on a $\overrightarrow{UM} = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OS}$ et donc ces deux vecteurs sont colinéaires, ce qui signifie que les côtés $[UM]$ et $[OS]$ sont parallèles.

De même on a $\overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} -4 \\ 15/2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{SM}$, ce qui signifie que les côtés $[OU]$ et $[SM]$ sont parallèles. Ainsi le quadrilatère $OSMU$ est bien un parallèlogramme.

b) Montrons que ce quadrilatère est un trapèze non-rectangle (attention à la figure ci-dessous qui pourrait faire croire que le trapèze est rectangle !). En effet les côtés $[UR]$ et $[TS]$ sont parallèles car $\overrightarrow{UR} = \begin{pmatrix} 12 \\ -45/2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -15 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{TS}$. Les côtés $[TS]$ et $[TU]$ ne sont pas perpendiculaires car $\overrightarrow{TS} \bullet \overrightarrow{TU} = \begin{pmatrix} 8 \\ -15 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -9 \\ -9/2 \end{pmatrix} = 8 \cdot (-9) + (-15) \cdot (-9/2) = -9/2 \neq 0$. Ainsi les côtés $[TU]$ et $[UR]$ ne sont pas non plus perpendiculaires et donc ce quadrilatère est un trapèze.



Exercice 10. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

a) $\vec{u} \bullet \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \|\vec{u}\|^2$;

b) $(a\vec{u}) \bullet \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} au_iv_i = a\sum_{i=1}^{n} u_iv_i = a(\vec{u} \bullet \vec{v})$;

c) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i = \sum_{i=1}^{n} v_iu_i = \vec{v} \bullet \vec{u}$;

d) $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet (v_1 + w_1; \cdots; v_n + w_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i(v_i + w_i) = \sum_{i=1}^{n}(u_iv_i + u_iw_i) = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i + \sum_{i=1}^{n} u_iw_i$
$= \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$.

Exercice 11. Une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à $\vec{u}$ est $4x + 7y = 0$, et son équation réduite est $y = -\frac{4}{7}x$. Un vecteur directeur de cette droite est donné par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$, et une équation cartésienne de la droite ayant $\vec{u}_\perp = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur est $7x - 4y = 0$, et son équation réduite est $y = \frac{7}{4}x$.

Exercice 12.

a) Faux, car par exemple $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = -1$.

b) Faux, en prenant le point $(0;0)$ pour origine et les bases $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$. Ces repères sont différents car les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ sont orthogonaux tandis que ceux de $\mathcal{B}_2$ ne le sont pas.

c) Cette inégalité est toujours vraie, en effet quels que soient $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$, on a $\vec{u} \bullet \vec{v} = \cos(\alpha)\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ et donc en prenant la valeur absolue de cette égalité, on a

$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| = |\cos(\alpha)| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

car $|\cos(\alpha)| \leq 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) Vrai, car alors on a $\vec{u} \bullet \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot v_i = 0$.

e) Vrai, car alors on a $0 = \vec{u} \bullet \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$. Comme cette dernière somme de carrés est nulle, cela signifie que chacun des termes de la somme est nul, autrement dit $u_i^2 = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et donc $u_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ainsi $\vec{u} = \vec{0}$.

f) C'est faux si $\lambda < 0$ car la norme d'un vecteur est toujours positive ou nulle.

g) Vrai. Soit $\lambda > 10$ un irrationnel (par exemple, le nombre 101 n'est pas un carré parfait et donc $\sqrt{101}$ est irrationel et strictement plus grand que 10). Le vecteur $\vec{u} = (\lambda; 0; \ldots; 0)$ a pour norme

$$\|\vec{u}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{1/2} = \left(\lambda^2\right)^{1/2} = \lambda$$

Exercice 13. Notons α l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

a) On a $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{a} \bullet \vec{b} = -4$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{13}$, $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \dfrac{-4\sqrt{65}}{65}$ et donc $\alpha \cong 119.74°$.

b) On a $\vec{a} = \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{a} \bullet \vec{b} = 6$, $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2\sqrt{5}$, $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \dfrac{6}{3 \cdot 2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ et donc $\alpha \cong 63.43°$.

c) On a $\vec{a} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$, $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$, dans ce cas c'est plus simple car $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = 0$ et donc $\alpha = 90°$.

Exercice 14.

a) On a $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{a} \bullet \vec{b} = -7$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{14}$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{13}$, $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \dfrac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{13}} = \dfrac{-7\sqrt{182}}{182}$ et donc $\alpha \cong 121.26°$.

b) On a $\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a} \bullet \vec{b} = 1$, $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{3}$, $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$ et donc $\alpha \cong 78.90°$.

c) Dans ce cas le produit scalaire vaut zéro et donc l'angle entre les deux vecteurs est 90°.