Corrigé série 27

Exercice 1.

1. On peut directement calculer l'équation du plan en utilisant une proposition du cours
$$\begin{vmatrix} x-3 & 2 & 3 \\ y-4 & 3 & -2 \\ z-5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x - 5y - 13z + 82 = 0.$$

2. Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ appartenant au plan :
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Ainsi on peut calculer l'équation du plan en utilisant une proposition du cours
$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y-2 & 0 & 0 \\ z-7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff y - 2 = 0.$$

3. On utilise à nouveau la même proposition pour obtenir :
$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ y & 4 & 4 \\ z & -6 & -5 \end{vmatrix} = 0 \iff x - 2y - z = 0.$$

Exercice 2.

On calcule l'équation cartésienne des plans ABC et PQR comme à l'exercice précédent :
$$\begin{vmatrix} x-1 & -3 & -6 \\ y-4 & -12 & -15 \\ z-1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \iff -2x - 3z + 5 = 0,$$
et
$$\begin{vmatrix} x-3 & 0 & -3 \\ y-3 & -16 & -8 \\ z & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff -2x - 3z + 3 = 0.$$
Ces deux plans ont le même vecteur normal $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; ils sont donc parallèles.

Exercice 3. Ces traces sont $(2; -2; 0)$, $(0; -4; 6)$ et $(4; 0; -6)$. Pour trouver par exemple la première trace, il faut utiliser les équations cartésienne de la droite $x - 1 = y + 3 = \frac{3 - z}{3}$ et poser successivement $z = 0$, $y = 0$ et $x = 0$.

Exercice 4. Dans chaque cas, on commence par calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, puis leur produit vectoriel. Si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \vec{0}$, les vecteurs sont colinéaires et les droites sont soit parallèles, soit confondues ; pour savoir dans quel cas on se trouve, on vérifie si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (directement, ou en calculant $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$) ; si ces vecteurs sont colinéaires, les deux droites AB et CD sont confondues, sinon, les droites sont parallèles non confondues. Si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$, on calcule la distance entre les deux droites par la formule du cours ; si cette distance est nulle, les droites sont sécantes, sinon elles sont gauches.

Une autre méthode est d'égaliser les équations paramétriques des droites : $\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} + \mu \cdot \overrightarrow{CD}$; en résolvant pour λ et μ, on trouve les points qui appartiennent simultanément aux deux droites. On en trouve un unique, une infinité ou aucun permettant de conclure que les droites sont sécantes, confondues, ou non-sécantes. Finalement pour décider si les droites sont parallèles ou gauches, on regarde si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires ou pas.

On trouve les réponses suivantes :

1. Les droites sont sécantes en $(5; 2; -3)$.
2. Les droites sont parallèles (non confondues).
3. Les droites sont gauches.

Exercice 5.

(a) On substitue les points de la droite dans l'équation du plan :
$2(3 + k) + (5 - k) - (3 + k) = 0 \iff 6 + 4k + 5 - 2k - 3 - 2k = 0 \iff 8 = 0$ qui est faux.
On en conclut que la droite ne coupe pas le plan et donc qu'elle est parallèle à ce plan.
On peut aussi calculer que le produit scalaire d'un vecteur directeur de la droite avec un vecteur normal du plan est nul : $\vec{d} \bullet \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 - 1 - 1 = 0$.

(b) Cette fois on résout le système

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 0, \end{cases}$$

qui admet comme solution le point $\left(\frac{32}{17}; -\frac{40}{17}; -\frac{44}{17}\right)$, ainsi la droite coupe le plan en ce point.

Exercice 6. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ d'où les coordonnées du centre de gravité $G = (1; 1; 1)$.
L'équation paramétrique de la droite OD s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie donc sans peine que le centre G appartient à cette droite.

Exercice 7.

1. Avec la formule vue au cours, $\delta(P; \pi) = \frac{|2 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 7^2}} = \frac{|26|}{\sqrt{78}} = \frac{\sqrt{78}}{3}$;
2. De même, $\delta(P; \pi) = \frac{|3 \cdot (-2) - 4 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} = \frac{|-25|}{5} = 5$.

Exercice 8. Nommons la première droite d_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{d_1}$ et passant par le point A_1 et la seconde droite d_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{d_2}$ et passant par le point A_2. On calcule alors

$$\overrightarrow{d_1} \wedge \overrightarrow{d_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Ainsi on peut calculer la distance entre les deux droites :

$$\delta(d_1; d_2) = \frac{\left| \left(\overrightarrow{d_1} \wedge \overrightarrow{d_2} \right) \bullet \overrightarrow{A_1A_2} \right|}{||\overrightarrow{d_1} \wedge \overrightarrow{d_2}||} = \frac{|-8|}{4\sqrt{3}} = \frac{8}{4\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Exercice 9. Soient $A = (2, 1, 0)$ et $B = (-1, 4, 2)$. Alors, le point milieu M de A et B est

$$M = \frac{A + B}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1 \right).$$

Le plan médiateur doit contenir M. De plus, le plan médiateur doit être orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BA} = (3, -3, -2)$. Donc, le plan est de la forme

$$3x - 3y - 2z + d = 0,$$

où

$$3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{5}{2} - 2 \cdot 1 + d = 0.$$

On trouve que $d = 8$.

Exercice 10.

a) Observe que l'angle entre deux plans est l'angle entre leurs deux vecteurs normaux et on sait calculer l'angle entre deux vecteurs.
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne se coupent pas ; ils sont parallèles. On peut dire que l'angle entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est nul.
L'angle entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est $\frac{\pi}{2}$.

b) On utilise la formule et on obtient

$$\frac{x+y+z}{\sqrt{3}} = \pm\frac{x-y-z-1}{\sqrt{3}}$$

Ainsi, les plans bissecteurs sont $2y+2z=-1$ et $2x=1$.

c) Comme les plans sont parallèles, il n'y a qu'un seul plan bissecteur. Par inspection, on trouve que le plan bissecteur de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est $x+y+z=1$.
(On pourrait aussi utiliser la formule ; dans ce cas une des deux possibilités est impossible.)

Exercice 11.

a) On observe que la droite, qui est parallèle au vecteur $(2,-2,2)$, est parallèle au plan, qui a vecteur normal $(2,1,-1)$:

$$(2,-2,2)\cdot(2,1,-1) = 2\cdot 2 - 2\cdot 1 - 2\cdot 1 = 0.$$

Mais, la droite passe par le point $(3,5,3)$, qui n'est pas contenu dans le plan. Donc, la droite est disjointe du plan.

b) Comme ci-dessus, on trouve que la droite est parallèle au plan. Mais cette fois, la droite et le plan ont le point $(2,3,1)$ en commun. Donc, la droite est complètement contenue dans le plan.

c) On trouve (par élimination de Gauss, par exemple) que l'intersection des trois plans donnés ont un point en commun, le point $\left(\frac{32}{17}, -\frac{40}{17}, -\frac{44}{17}\right)$.

Exercice 12. Déterminer le centre D et le rayon r du cercle Γ, intersection de la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 10 = 0$ et du plan α d'équation $z = 0$.

On détermine d'abord le centre C et le rayon R de la sphère Σ :
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 + 10 - 4 - 9 - 1 = 0 \Leftrightarrow$ $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 4$. Ainsi, $C(2; -3; 1)$ et $= 2$.

La droite p perpendiculaire au plan α et passant par C est définie par : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le centre D du cercle Γ se trouve à l'intersection du plan α et de la droite p.

Comme $z = 0$, on obtient $1 + m = 0 \Rightarrow m = -1$, donc $D(2; -3; 0)$.

Pour déterminer le rayon, on utilise Pythagore dans un triangle CDP où P un point sur la sphère et sur le cercle. Comme $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$r = \sqrt{R^2 - \|CD\|^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

Méthode 2 :
Dans ce cas particulier où α est le plan d'équation $z = 0$, on peut travailler en deux dimensions dans le plan Oxy. En posant $z = 0$ dans l'équation de Σ il vient :

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 + 10 - 4 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 3$$

Le centre cherché est donc $D(2; -3; 0)$ et le rayon $R = \sqrt{3}$.

Exercices théoriques

Exercice 13. On considère un tétraèdre de sommets A, B, C, et D dans l'espace et on cherche à construire des sphères tangentes simultanément aux quatre plans ABC, ABD, ACD, et BCD. On procède comme dans le cas de la dimension 2 où on veut construire les cercles qui sont tangents simultanément aux trois droites déterminées par les côtés d'un triangle donné.

Notre problème revient à trouver le nombre de points P qui sont simultanément équidistant aux quatre faces du tétraèdre.
Le lieu des points équidistants de deux faces F_1 et F_2 du tétraèdre est la réunion des deux plans bissecteurs de ces faces. Par suite, le lieu des points équidistants à trois faces F_1, F_2, et F_3 est la réunion de quatre droites $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$, chacune étant l'intersection d'une paire de plans bissecteurs, par exemple un des plans bissecteurs de F_1 et F_2 part, et un des plans bissecteurs de F_1, F_3.
De plus, le lieu des points équidistants aux plans F_1 et F_4 se compose de deux plans bissecteurs, disons B_1 et B_2. Chaque point d'intersection d'une des droites $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ avec l'un des plans B_1 ou B_2 est équidistant aux plans F_1, F_2, F_3 et F_4, et ce sont les seuls tels points.
Il y a donc au plus 8 points équidistants aux plans F_1, F_2, F_3, F_4. Il y en a peut être moins de 8, car une droite ℓ_k peut parfois être parallèle à un des F_j, ce qui est le cas quand $ABCD$ est régulier ; en effet, dans le cas où $ABCD$ est régulier, il n'y a que 5 sphères exinscrites.