IV. Les sections coniques

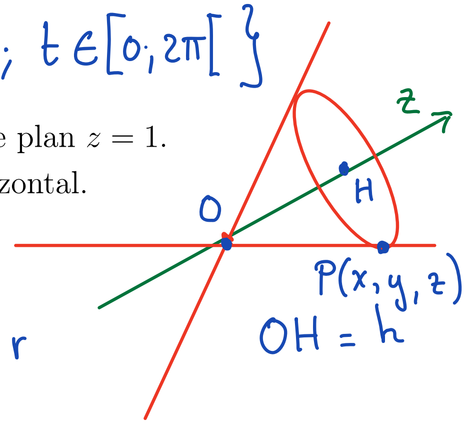
La semaine passée, nous avons étudié les coniques par leur définition focale et/ou bifocale. Nous avons trouvé les expressions des équations du second degré qui les caractérisent.
Aujourd'hui, nous allons comprendre pourquoi ces courbes s'appellent coniques, puis apprendre des techniques qui permettent de trouver leurs caractéristiques à partir de leur équation.

1 Sections coniques

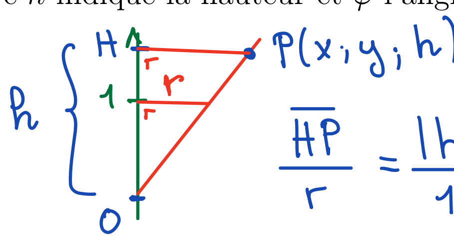
C'est probablement à Apollonius, né à Perga (en Turquie actuellement) vers −262 et décédé vers −190, que l'on doit la première étude des coniques en tant que telles (sections planes d'un cône). C'est lui qui donna à l'ellipse, à la parabole et à l'hyperbole les noms que nous leur connaissons, même si ce n'est qu'à travers des écrits de Pappus (4ème siècle) que les géomètres de la Renaissance déduisirent les découvertes d'Apollonius. On lui attribue l'hypothèse des orbites excentriques pour expliquer le mouvement apparent des planètes et la variation de vitesse de la Lune !

Par un *cône*, on entend ici un cône de révolution formé par la rotation d'une droite autour d'un axe qu'elle coupe en un point. Sans restreindre la généralité, on supposera que ce point est l'origine et que l'axe de rotation est l'axe Oz. En d'autres termes, nous étudierons les cônes donnés par

$$\{ (|h|\cdot r\cos t \,;\, |h|\cdot r\sin t \,;\, h) \,;\, h\in\mathbb{R} \,;\, t\in[0;2\pi[\}$$

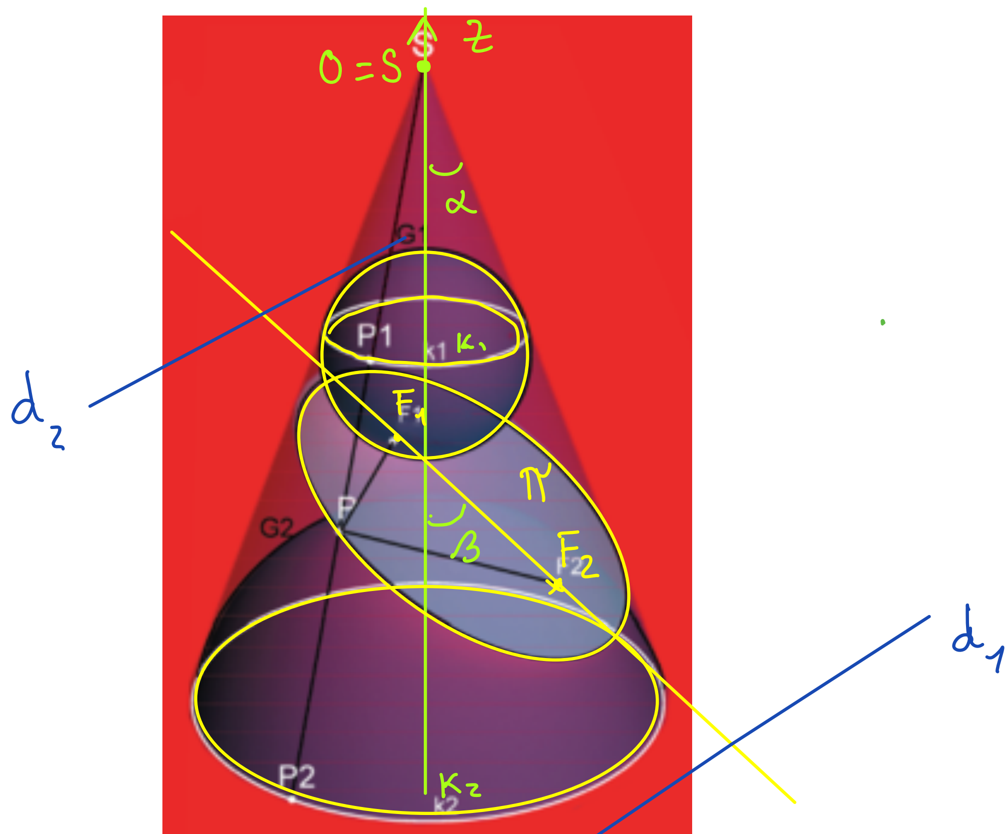


où $r > 0$ est un nombre fixé qui indique le rayon du cercle situé dans le plan $z = 1$.
Le paramètre h indique la hauteur et φ l'angle formé dans le plan horizontal.



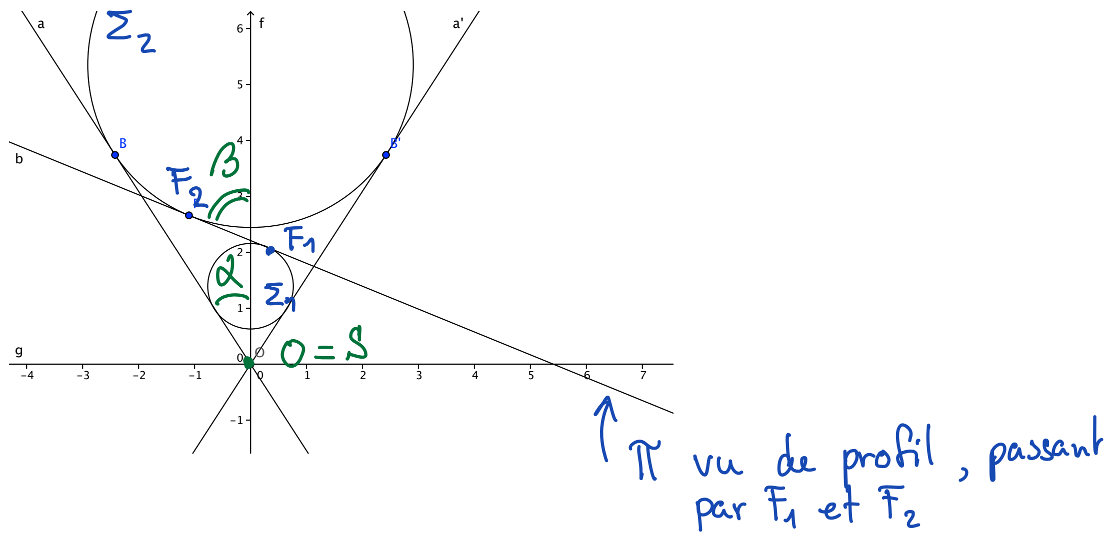
$$\frac{\overline{HP}}{r} = \frac{|h|}{1} \quad 1 \quad \iff \overline{HP} = |h|\cdot r$$

Notre but est de comprendre comment un plan quelconque coupe un tel cône. Lorsque le plan est horizontal l'intersection est visiblement un cercle ou éventuellement un point, mais que se passe-t-il en général ? Nous suivrons la méthode du mathématicien belge Germinal Pierre Dandelin, né le 12 avril 1794 au Bourget, France, décédé le 15 février 1847 à Bruxelles.



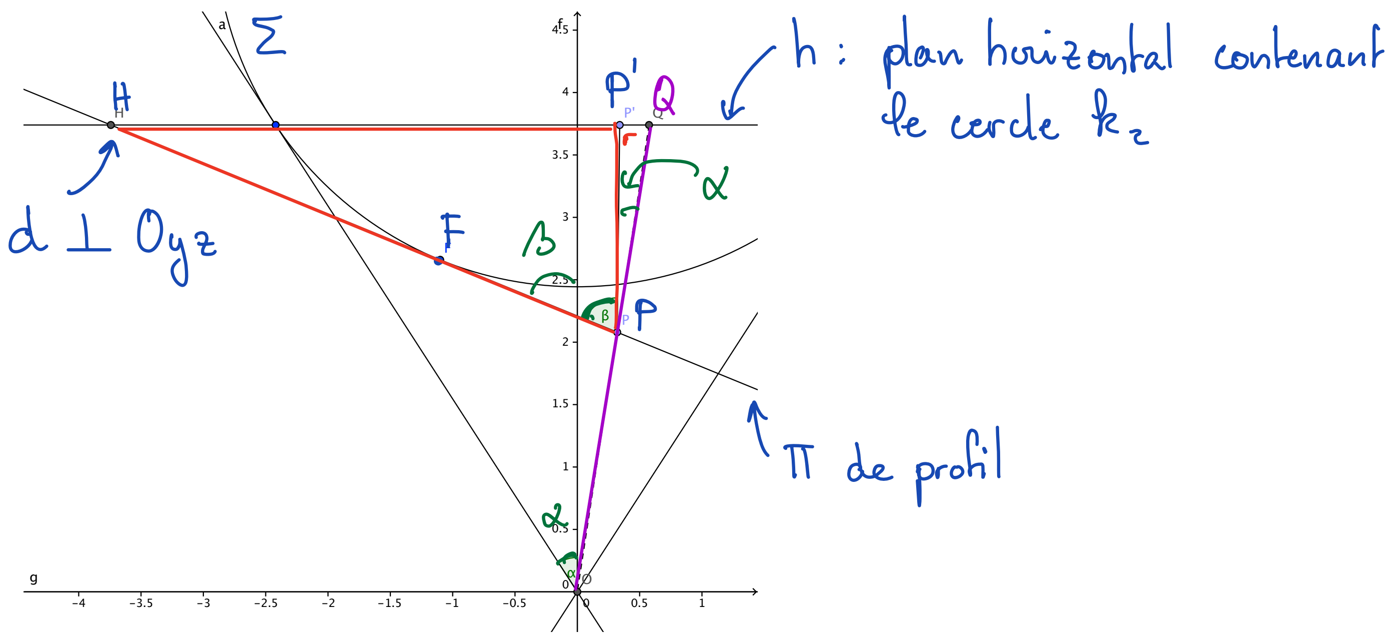
- π : plan coupant le cône
- Σ_1 et Σ_2 les deux sphères tangentes au cône et à π.
- F_1 et F_2 : points de tangence de Σ_1 et Σ_2 avec π.
- F_1F_2 est supposée être dans le plan Oyz après une éventuelle rotation du cône autour de Oz.
- d_1 et d_2 : droites d'intersection de π avec les plans contenant les cercles $k_1 = \Sigma_1 \cap \pi$ et $k_2 = \Sigma_2 \cap \pi$.
- $\alpha = \measuredangle(Oz, \text{génératrice du cône})$ et $\beta = \measuredangle(Oz, \pi)$

Coupe du plan Oyz du cône renversé "sur son sommet" et coupé par le plan π.



Théorème 1.1. *L'intersection d'un cône et d'un plan est soit une ellipse, soit une parabole, soit une hyperbole.*

Démonstration. Considérons les points, droites et plans suivants :



P : point "mobile" sur $\pi \cap$ cône

P' : projection orthogonale de P sur le plan h

H : projection orthogonale de P (et de P') sur d

But : montrer que $\delta(P, F) = e \cdot \delta(P ; d)$

$\triangle PP'H$, toujours vu "de face", en vraie grandeur est rectangle en P'.
et $\measuredangle HPP' = \beta$ car $PP' \parallel Oz$ par construction de P'.

$$\Longrightarrow \quad \overline{PP'} = \overline{PH} \cos\beta = \delta(P,d)\cdot\cos\beta \qquad (1)$$

Par ailleurs, la droite OP en traitillé, est tangente à Σ en Q.

$\Longrightarrow \overline{PQ} = \overline{PF}$ car F est aussi un point de tangence à Σ d'une droite qui passe par P.

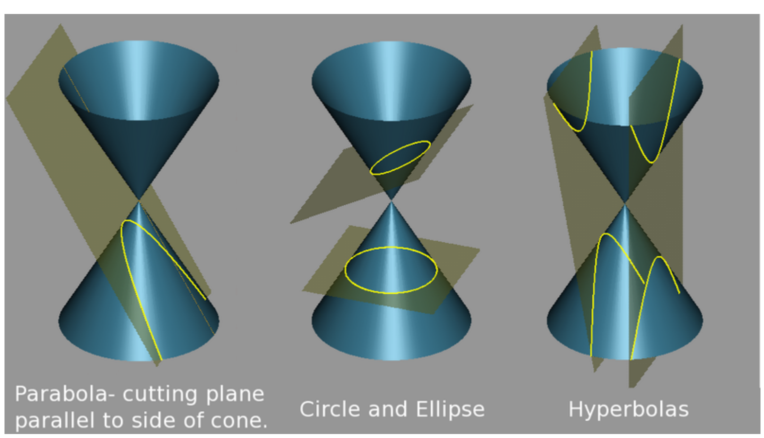
Or $PP'Q$ est rectangle en P' et l'angle $\widehat{PP'Q} = \alpha$ d'où

$$\overline{PP'} = \overline{PQ}\cdot\cos\alpha = \overline{PF}\cos\alpha = \delta(P,F)\cdot\cos\alpha \qquad (2)$$

(1) et (2) $\Longrightarrow \overline{PP'} = \delta(P;d)\cdot\cos\beta = \delta(P,F)\cdot\cos\alpha$

$$\Longrightarrow \delta(P,F) = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\,\delta(P,d) = e\cdot\delta(P,d) \quad \text{où } e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$ □

Exemple 1.2. Lorsque l'angle β entre le plan p et la verticale vaut exactement α, alors $e = 1$ et la conique est une parabole.
Lorsque $\beta < \alpha$, on obtient une hyperbole car $e > 1$ et si $\beta > \alpha$, on a une ellipse.



2 L'équation générale d'une conique

Nous avons déduit de la définition d'une conique (par foyer et directrice) que l'équation générale d'une telle courbe est donnée par une équation du second degré de la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Comment reconnaître la conique décrite par une telle formule et comment trouver ses foyers ? Nous allons faire un changement de variables pour éliminer le terme en xy. Autrement dit, puisque nous savons que cette équation décrit une conique, nous allons déterminer son axe de symétrie afin de remplacer le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ par un autre repère orthonormé $\mathcal{R}^* = (O, \vec{f_1}, \vec{f_2})$ dans lequel l'équation se simplifie. Comme $\vec{f_1}$ est de longueur 1, il a la forme

$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ et pour avoir une base orthonormée $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

$\left(\text{ou } \vec{f_2} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \right) \implies \mathcal{B}^* = (\vec{f_1} ; \vec{f_2})$

Quelle est la relation entre les inconnues x, y de la base canonique $\mathcal{B}$ et les inconnues (u, v) de la nouvelle base $\mathcal{B}^*$? Les coordonnées (u, v) sont obtenues par un simple changement de base :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos t - v\sin t \\ u\sin t + v\cos t \end{pmatrix}$$

Remplaçons l'expression de $x = u\cos t - v\sin t$ et $y = u\sin t + v\cos t$ dans l'équation de la conique et voyons comment éliminer le double produit. Dans la pratique, il faudra tenir compte de tous les coefficients, mais ici, concentrons-nous sur la partie quadratique $ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Il vient $\quad a(u\cos t - v\sin t)^2 + 2b(u\cos t - v\sin t)(u\sin t + v\cos t) + c(u\sin t + v\cos t)^2$.

La partie en uv vaut $\quad -2a\cos t\sin t + 2b(\cos^2 t - \sin^2 t) + 2c\sin t\cos t$

$$= \underbrace{2c\sin t\cos t + 2b\cos^2 t}\ \underbrace{-\ 2a\cos t\sin t - 2b\sin^2 t}$$

$$\Leftrightarrow\ 2\cos t(c\sin t + b\cos t) - 2\sin t(a\cos t + b\sin t). \qquad (*)$$

Maintenant arrive l'observation clé !

Si $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, avec la vap λ,

alors $A\vec{f_1} = \lambda \vec{f_1} \iff \begin{cases} a\cos t + b\sin t = \lambda\cos t \\ b\cos t + c\sin t = \lambda\sin t \end{cases}$

$(*)$ devient $\quad 2\cos t\,\lambda\sin t - 2\sin t\,\lambda\cos t = 0$!

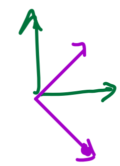
et le terme en $u \cdot v$ s'annule.

Proposition 2.1. *Si $\vec{f_1}$ est un vecteur propre de norme 1 de la matrice A, le changement de variable $x = u\cos t - v\sin t$ et $y = u\sin t + v\cos t$ rend l'équation quadratique de la forme*

$$a'u^2 + c'v^2 + 2d'u + 2e'v + f' = 0.$$

Remarque 2.2. En effectuant le changement de variable les valeurs des coefficients a' et c' sont les suivants :

$$a' = a\cos^2 t + 2b\cos t\sin t + c\sin^2 t \quad \text{et} \quad c' = a\sin^2 t - 2b\cos t\sin t + c\cos^2 t.$$



Exemple 2.3. On considère la conique d'équation $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 32y + 92 = 0$. (*)

$2 \div 2 = 1$

La matrice associée est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dont une valeur propre est visiblement 2 (et 4)

car $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = 0 \iff$

$(3-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff$

$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \iff$

$(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$

$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 4$

Posons $\vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-u+v) \end{pmatrix}$

$E_2 : A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_2 = \langle (1; -1) \rangle$

$E_4 : A - 4I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_4 = \langle (1; 1) \rangle$

On substitue x et y dans (*)

$\frac{3}{2}(u+v)^2 + \frac{2}{2}(u+v)(-u+v) + \frac{3}{2}(-u+v)^2 - \frac{32}{\sqrt{2}}(-u+v) + 92 = 0$

$\iff 2u^2 + 4v^2 + 16\sqrt{2}\,u - 16\sqrt{2}\,v + 92 = 0$

Cette équation est obtenue par rotation de $-\frac{\pi}{4}$

En fait, les nouveaux coefficients a' et c' sont les deux valeurs propres de la matrice A ! Pour continuer, il ne reste plus qu'à effectuer une translation afin d'éliminer les termes en u et v. Ceci se fait comme d'habitude en complétant les carrés.

Exemple 2.4. On considère la conique d'équation $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 32y + 92 = 0$.

Après le changement de variable $x = u\frac{\sqrt{2}}{2} + v\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = -u\frac{\sqrt{2}}{2} + v\frac{\sqrt{2}}{2}$, on arrive à

$$2u^2 + 4v^2 + 16\sqrt{2}u - 16\sqrt{2}v + 92 = 0.$$

Complétons les carrés : $2\left(u^2 + 8\sqrt{2}u + 32\right) + 4\left(v^2 - 4\sqrt{2}v + 8\right) + 92 = 64 + 32$

$$\iff 2\left(\underbrace{u + 4\sqrt{2}}_{=X}\right)^2 + 4\left(\underbrace{v - 2\sqrt{2}}_{=Y}\right)^2 = 4$$

Par conséquent, en effectuant le changement de variables $X = u + 4\sqrt{2}$ et $Y = v - 2\sqrt{2}$, on obtient

$$2 \cdot X^2 + 4Y^2 = 4$$

Sous forme canonique : $\dfrac{X^2}{(\sqrt{2})^2} + \dfrac{Y^2}{1^2} = 1$ c'est une ellipse!

Comment déterminer quelle type de conique se cache derrière une équation générale ?

Définition 2.5. Le *discriminant* de la conique d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ est le nombre $\Delta = b^2 - ac$. $= -\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

Théorème 2.6. *La conique d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ est une ellipse si son discriminant $\Delta < 0$, une parabole si $\Delta = 0$ et une hyperbole si $\Delta > 0$.*

Démonstration. Après avoir fait le changement de variable correspondant à une rotation, nous avons calculé les valeurs $a' = a\cos^2 t + 2b\cos t\sin t + c\sin^2 t$ et $c' = a\sin^2 t - 2b\cos t\sin t + c\cos^2 t$ de la nouvelle équation $a'u^2 + c'v^2 + d'u + e'v + f' = 0$. Que vaut le discriminant de cette équation ?

Observons que la matrice $A' = \begin{pmatrix} a' & \cancel{b'}\,0 \\ \cancel{b'}\,0 & c' \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice A.

On l'obtient en effet en effectuant le changement de base correspondant à la rotation d'angle t :

$$A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}}_{S^{-1}} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}}_{S} = S^{-1}AS.$$

Ainsi $\Delta' = -\det A' = -\underbrace{\det(S^{-1})}_{=1} \cdot \det(A)\underbrace{\det(S)}_{=1} = -\det A = \Delta$

Le discriminant ne change pas avec la rotation, ni par translation.

On a alors $AX^2 + CY^2 = E$ dont $\Delta = 0^2 - AC$.

- $\Delta > 0 \iff A$ et C sont de signe opposé $\Rightarrow$ hyperbole □
- $\Delta = 0 \iff A$ ou C est nul $\Rightarrow$ parabole
- $\Delta < 0 \iff A$ et C sont de même signe $\Rightarrow$ ellipse.

Exemple 2.7. On étudie la conique c d'équation $x^2 + 6xy + 9y^2 + \sqrt{19}x + \sqrt{10}y = 0$.
On calcule $\Delta = 3^2 - 1 \cdot 9 = 0 \implies$ c'est une parabole

Mais laquelle ? Une valeur propre évidente de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ est 0 car $\det A = 9 - 3^2 = 0$

Vecteur propre associé : $\operatorname{Ker}(A) = \langle (3;-1) \rangle = E_0$

$\implies \vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, vecteur propre pour $\lambda = 10$.
car $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ainsi $S = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

On effectue donc le changement de variables $\quad x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3u + v)$ et $y = \frac{1}{\sqrt{10}}(-u + 3v)$.

On calcule la nouvelle forme de l'équation en coordonnées $(u; v)$ par rapport à la nouvelle base obtenue après rotation et on obtient

$$10v^2 + 2u + 4v = 0 \quad \leftrightarrow \quad u = -5v^2 - 2v$$

Il s'agit d'une parabole concave d'axe Ou dans le repère donné par $(O; \vec{f_1}; \vec{f_2})$.

Son sommet se trouve au point du graphe de cette fonction quadratique où la dérivée s'annule, donc lorsque $v = -\frac{1}{5}$ et on obtient $u = \frac{1}{5}$. dans $(O; \vec{f}_1; \vec{f}_2)$, $S\left(\frac{1}{5} ; -\frac{1}{5}\right)^*$

En faisant le changement de variables inverse, on obtient

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{10}}{25}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\implies S\left(\frac{\sqrt{10}}{25} ; \frac{-2\sqrt{10}}{25}\right)$$