EPFL

Ens: Prof. Friedrich Eisenbrand
Algèbre Linéaire Avancée II - MA
25 juin 2024
Durée: 210 minutes

1

Student 1

SCIPER : **999XXX**

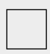
Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 20 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  +2 points si toutes les réponses correctes et aucune réponse incorrecte sont inscrites,
  0 point si il n'y a aucune réponse inscrite,
  −1 autrement.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  +1 point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  −1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

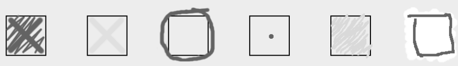
choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen



Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte



Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Certaines questions admettent **plusieurs** bonnes réponses.

Question 1
Soit V un espace vectoriel sur K de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique $\langle , \rangle$. Quelles assertions sont correctes:

- ☐ Si $v \in V \setminus \{0\}$ t.q. $\langle v, v \rangle \neq 0$, alors

$$V = \operatorname{span}\{v\} \oplus H, \text{ où } H = \{h \in V : \langle h, v \rangle = 0\}.$$

  Ici le symbole $\oplus$ dénote la somme directe.
- ☐ S'il existe $v \in V \setminus \{0\}$ t.q. $\langle v, v \rangle = 0$, alors $\langle , \rangle$ est dégénérée.
- ☐ Si $\langle v, v \rangle \neq 0$ pour tout $v \in V \setminus \{0\}$, alors $\langle , \rangle$ est non-dégénérée.
- ☐ Si $\langle v, v \rangle \neq 0$ pour tout $v \in V \setminus \{0\}$, alors V possède une base orthogonale.
- ☐ Aucune des autres assertions est vraie.

Question 2 On considère

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2 \text{ et } \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b'\|^2 \tag{1}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b, b' \in \mathbb{R}^m$. Soient $S \subseteq \mathbb{R}^n$ et $S' \subseteq \mathbb{R}^n$ les solutions (optimales) des deux problèmes (1) respectivement. Lesquelles des assertions suivantes sont correctes?

- ☐ Si $A^T(b - b') = 0$, $x \in S$ et $x' \in S'$, alors $x = x'$.
- ☐ Si $A^T(b - b') = 0$, alors $S = S'$.
- ☐ Si $S = S'$, alors $A^T(b - b') = 0$.
- ☐ Si $A^T(b - b') = 0$ et si $x \in S$ et $x' \in S'$ sont de norme minimale $\|\cdot\|_2$ respectivement, alors $x = x'$.
- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question 3 Soient $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Lesquelles des assertions suivantes sont correctes?

- ☐ $\mathrm{rang(A \cdot B)} \geq \min\{\mathrm{rang(A)}, \mathrm{rang(B)}\}$.
- ☐ $\mathrm{rang(A \cdot B)} \leq \mathrm{rang(A)} \cdot \mathrm{rang(B)}$.
- ☐ Les polynômes caractéristiques de $A \cdot B$ et $B \cdot A$ sont les mêmes.
- ☐ $A \cdot B$ et $B \cdot A$ admettent la même forme normale de Jordan, à permutation des blocs près.
- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question 4 Soient

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cdot x^{304} + 3 \cdot x^{105} + x^2 + 2 \quad \text{et} \\ g(x) &= (x^3 - x)(x - 2) \end{aligned}$$

deux polynômes de $\mathbb{Z}_5[x]$. On considère la division avec reste

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

où $r(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Quel est le coefficient a_2?

- ☐ $a_2 = 0$
- ☐ $a_2 = 1$
- ☐ $a_2 = 2$
- ☐ $a_2 = 3$
- ☐ $a_2 = 4$

Question 5
Soit $\phi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ une racine du polynôme $p(x) = x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Quel est l'inverse $1/\phi$ de ϕ:

- ☐ $-\frac{1}{2}\phi - 1$
- ☐ $\phi + 1$
- ☐ $\phi - \frac{1}{2}$
- ☐ $\phi^2 + 2\phi$
- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question 6 Soit $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ et $p_A(x) = (-1)(x^3 - 2) \cdot (x^2 - 4)$ son polynôme caractéristique. Soit $\mathrm{rang}(\mathrm{A} - \sqrt[3]{2} \cdot \mathrm{I}_5) = 4$. Lesquelles sont des formes normales de Jordan de A:

- ☐ $\begin{pmatrix} \sqrt[3]{2} & & & & \\ & \sqrt[3]{2} & 1 & & \\ & & \sqrt[3]{2} & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} \sqrt[3]{2} & 1 & & & \\ & \sqrt[3]{2} & 1 & & \\ & & \sqrt[3]{2} & & \\ & & & -2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} \sqrt[3]{2} & 1 & & & \\ & \sqrt[3]{2} & & & \\ & & \sqrt[3]{2} & & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$
- ☐ Aucune des matrices est une forme normale de Jordan de A.

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle peut être fausse).

Question 7 Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ t.q. toutes composantes sont égaux à 1 ($a_{i,j} = 1$, $1 \leq i, j, \leq n$). La forme normale d'Hermite de la matrice

$$100 \cdot A - I_n$$

est I_n.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 8 Aucun polynôme $p(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$ t.q. $\deg(p) \geq 3$ est irréductible.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 9 Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de $A^T A$ et $k \in \mathbb{N}_+$ et $k \leq \min\{m, n\}$. Si $\lambda_1 > \cdots > \lambda_k$, le meilleur sous-espace approximatif de dimension $\leq k$ des points $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ est unique.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 Soient K un corps et $A, B \in K^{n\times n}$. Les matrices

$$\begin{pmatrix} A \cdot B & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \in K^{2n\times 2n} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix} \in K^{2n\times 2n}$$

sont semblables.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 Soit V un espace vectoriel sur K et $N : V \longrightarrow V$ un endomorphisme nilpotent, c.à.d. il existe un $i \in \mathbb{N}$ t.q. $N^i(v) = 0$ pour tout $v \in V$. Soient $x, y \in V$ et $n \in \mathbb{N}_+$ t.q. $y = x + N(x) + 2N^2(x) + \cdots + n \cdot N^n(x)$.
Alors les éléments de l'orbite de x et ceux de l'orbite de y engendrent le même sous-espace de V.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12
Soit V un espace vectoriel de dimension $n < \infty$ sur un corps K de caractéristique $\neq 2$, muni d'une forme bilinéaire symétrique $\langle , \rangle$. Alors V possède une base orthogonale $\{v_1, \ldots, v_n\}$ t.q.

$$\langle v_i, v_i \rangle \in \{1, -1, 0\} \text{ pour } i = 1, \ldots, n.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $n \in \mathbb{N}$ t.q. A^n est diagonalisable. Alors A est diagonalisable.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 14 Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice pseudo-inverse de A. Alors A et A^+ sont semblables.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 15 Toute matrice $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ t.q. son polynôme caractéristique se laisse écrire comme

$$p_A(x) = (-1)^n p_1(x) \cdots p_k(x)$$

où les $p_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$ sont irréductibles, unitaires et distincts ($p_i(x) \neq p_j(x)$, si $i \neq j$) est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 16 Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K et soit

$$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow K$$

une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée. Soient $v \in V$ et $H \subseteq V$ un sous-espace de V. S'il existe un vecteur $u \in H$ t.q.

$$\langle v - u, h \rangle = 0 \quad \forall h \in H,$$

alors il est unique.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 17 Tout polynôme $p \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ de degré impair est réductible.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 18 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 9 \\ 12 & 21 & 30 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 3}.$$

La forme normale de Smith de A est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 19 Soient $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ et $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice nilpotente. Pour $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ on définit $n_x = \max\{i \in \mathbb{N} \colon N^i(x) \neq 0\}$ et on dénote l'orbite de x par $\mathrm{orbite}(x)$.

Si les vecteurs dans la séquence

$$\mathrm{orbite}(v_1), \cdots, \mathrm{orbite}(v_k)$$

sont linéairement dépendant, alors

$$N^{n_{v_1}}(v_1), \ldots, N^{n_{v_k}}(v_k)$$

sont linéairement dépendant.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 Soit $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ une matrice symétrique. Toutes valeurs propres de A sont rationnelles.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique avec valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Si $\lambda_1 > \lambda_2$, alors la solution optimale du problème

$$\max_{x \in S^{n-1}} x^T A x$$

est unique.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 Soit $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subset \mathbb{R}^n$ une base de $\mathbb{R}^n$. Considérons $\{b_1^*, \ldots, b_n^*\} \subset \mathbb{R}^n$ le résultat du procédé de Gram-Schmidt sur B par rapport à un produit scalaire quelconque de $\mathbb{R}^n$ induisant la norme $\|\cdot\|$.

Soit $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ et $C = \{c_1, \ldots, c_n\} \subset \mathbb{R}^n$ t.q. $c_i = b_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j, j+1\}$, $c_j = b_{j+1}$ et $c_{j+1} = b_j$. Considérons aussi $\{c_1^*, \ldots, c_n^*\} \subset \mathbb{R}^n$ le résultat du procédé de Gram-Schmidt sur C.

Alors

$$\|b_j^*\| \cdot \|b_{j+1}^*\| = \|c_j^*\| \cdot \|c_{j+1}^*\|$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 23: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10

Soit F un corps. Pour $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n \in F[x]$, sa *dérivée* est $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n \cdot a_n x^{n-1} \in F[x]$.

(a) Soit $p(x) \in F[x] \setminus 0$ irréductible. Montrer que $\gcd(p(x), p'(x)) = 1$.

(b) Montrer pour $f(x), g(x) \in F[x]$ la formule

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Indice: Vous pouvez supposer $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)' = \alpha \cdot f' + \beta \cdot g'$ *pour* $\alpha, \beta \in K$ *et* $f, g \in K[x]$.

(c) Soit $E \supseteq F$ un corps et $p(x) \in F[x] \setminus \{0\}$ irréductible. Montrer que $p(x)$ ne possède pas de racines $\alpha \in E$ de multiplicité d'au moins 2.

(d) Soit $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ tel que son polynôme caractéristique $p_A(x) \in \mathbb{Q}[x]$ est irréductible. Montrer qu'il existe $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ inversible et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$A = U \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot U^{-1}.$$

Question 24: *Cette question est notée sur 10 points.*

□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9 □10

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et soit

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^T$$

une factorisation de A telle que $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est orthogonale et $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Pour $1 \leq \ell < n$ on a

$$\max_{\substack{x\in S^{n-1}\\ x\perp u_1,\dots,x\perp u_\ell}} x^T A x = \lambda_{\ell+1}$$

et $u_{\ell+1}$ est une solution optimale.

Question 25: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10

Dans cet exercice, on considère le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$ et la norme euclidienne correspondante. Soit $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, rang(B) = n et

$$B = (b_1^*, \cdots, b_n^*) \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \mu_{ij} \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

l'orthogonalisation Gram-Schmidt de B. Soit $\Lambda = \{B\,x \colon x \in \mathbb{Z}^n\}$ le réseau entier engendré par B.

i) Soit $v = Bx \in \Lambda$, $x \in \mathbb{Z}^n$. Montrer $\|v\| \geq |x_n| \cdot \|b_n^*\|$.

ii) Montrer que pour $v \in \Lambda \setminus \{0\}$

$$\|v\| \geq \min_{1\leq i\leq n} \|b_i^*\|.$$

iii) Le *défaut d'orthogonalité* de $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ est la quantité

$$\gamma(B) = \frac{\prod_{i=1}^n \|b_i\|}{|\det(B)|}.$$

Soit $v = Bx \in \Lambda$, $x \in \mathbb{Z}^n$. Montrer, que s'il existe un index $i \in \{1, \ldots, n\}$ t.q. $|x_i| > \gamma(B)$, alors

$$\|v\| > \min_{i=1,\ldots,n} \|b_i\|.$$