EPFL - Printemps 2025	Prof. Zs. Patakfalvi
Anneaux et Corps	**Exercices**
Série 13	

Les exercices marqués d'une étoile ($\star$) sont optionnels.

Exercice 1 (Correspondance de Galois).
Calculez les groupes de Galois $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ puis exprimez tous les sous-corps intermédiaires avec leur sous-groupe correspondant ainsi que des éléments primitifs[*] et polynôme minimaux pour ceux-ci des extensions Galoisiennes E de $\mathbb{Q}$ donnés par

1. le corps de décomposition de $x^3 - 2$ dans $\mathbb{C}$,
2. le corps de décomposition de $x^4 - 2$ dans $\mathbb{C}$.

Utilisez ce que vous savez déjà grâce aux exercices *Série 10 exercice 3* et *Série 11 exercice 2.*

Exercice 2.
Fixons un entier $n > 0$. Soit K un corps de caractéristique soit 0 soit positive et première avec n.

1. Démontrez que $x^n - 1 \in K[x]$ n'admet pas de racine multiples dans son corps de décomposition sur K.

   Autrement dit il y a n racines distinctes qui sont des n-ième racines de l'unité dans les extensions de K.

   Supposons à a partir de maintenant que K contient toutes les racines n-ièmes de l'unité.

2. ($\star$) Considérons une $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-galoisienne extension $K \subseteq L$. Démontrez, que $L = K\left(\sqrt[n]{a}\right)$ pour un $a \in K$ adéquat, où $\sqrt[n]{a}$ dénote un élément dont le n-ième puissance égale à a.

   Indice: considérons un générateur ϕ du groupe de Galois en tant qu'application K-linéaire sur L. Démontrez que le polynôme minimal de ϕ en tant qu'application K linéaire est $x^n - 1$. Utilisez la décomposition en espaces propres pour trouver un vecteur propre $\alpha \in L$ avec valeur propre une n-ième racine primitive de l'unité. Démontrez après que n est l'entier minimal tel que $\alpha^n \in K$.

3. Supposons maintenant $n = p$ premier. Démontrez que si $\sqrt[p]{a}$ est une racine fixée de $a \in K \setminus K^p$ (dans un corps de décomposition adéquat), alors $L = K(\sqrt[p]{a})$ est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ galoisienne.

   Indice: Soit ξ un p-ième racine primitve d'unité, et soit $\alpha = \sqrt[p]{a}$. Dans Lemme 4.9.1 des notes de cours on a démontré que toute les racines de $m_{\alpha,K}$ sont de forme de $\xi^j\alpha$, et que $K \subseteq L$ est galoisienne avec $\mathrm{Gal}(K/L)$ abélien. Notons aussi que puisque $a \notin K^p$, l'extension $K \subseteq L$ est non-triviale. Prenons donc un élément non-neutre $\phi \in \mathrm{Gal}(K/L)$. Démontrez que le plus petit entier $s > 0$ tel que $\phi^s(\alpha) = \alpha$ est $s = p$.

   Comme corollaire, déduisez que si $a \in K \setminus K^p$ alors le polynôme $x^p - a$ est irréductible dans $K[x]$. Donnez un contre-exemple à cet énoncé si p n'est pas premier.

4. Soit p un entier premier et soit $n > 0$ un entier positif arbitraire. Démontrez que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\left(e^{\frac{2\pi i}{p^n}}\right)$ est $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$-Galoisienne.

   Indice: Pour $n = 1$, en utilisant comme vu en cours que $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$ est irréductible montrez que $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}})$ est une extension de degré $p - 1$. Ensuite, utilisez le point précédent par induction pour conclure que l'extension $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\left(e^{\frac{2\pi i}{p^n}}\right)$ est de degré $|\,(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times\,|$. Ensuite, montrez que si ϕ est dans le groupe Galois et $\xi = e^{\frac{2\pi i}{p}}$, alors $\phi(\xi) = \xi^k$ pour un $k \in \mathbb{Z}$ avec $(k, p) = 1$, ce qui donnera lieu en réduisant k modulo p^n à une injection du groupe Galois dans $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$, ce qui permettra de conclure.

[*] C'est à dire des générateurs sur $\mathbb{Q}$ de ces extensions intermédiaires.

Exercice 3. 1. Démontrez que $\mathbb{Q}\left(e^{\frac{2\pi i}{9}} + e^{-\frac{2\pi i}{9}}\right)$ est $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-galoisisenne.

Indice: considérez l'extension $\mathbb{Q}\left(e^{\frac{2\pi i}{9}}\right)$.

2. Plus généralement, démontrez que pour chaque entier premier p, il existe une extension $\mathbb{Q} \subseteq L$ tel que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

   Indice: Pour $p \geq 3$ *considérez l'extension* $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\left(e^{\frac{2\pi i}{p^2}}\right)$, *et appliquez le théorème fondamental de la théorie de Galois.*

Exercice 4.
Soit K un corps, et soit $K \subseteq M = K(\alpha)$ et $K \subseteq N = K(\beta)$ des extensions galoisiennes de K.

1. Démontrez que $K \subseteq L = K(\alpha, \beta)$ est aussi galoisienne.

Supposons à partir de maintenant que $M \cap N = K$ en tant que sous-corps de L.

2. Démontrez que $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(M/K) \times \mathrm{Gal}(N/K)$ qui est la restriction sur chaque composante est un isomorphisme.

3. Démontrez que pour chaque entiers premiers distincts p et q, il existe une extension $\mathbb{Q} \subseteq L$ galoisienne tel que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

Exercice 5.
Soit $K \subseteq L$ une extension Q_8-galoisienne (où Q_8 est le groupe des quaternions), et soit $f \in K[x]$ un polynôme irréductible tel que L est un corps de décomposition de f. Démontrez que $\deg f = 8$.