

Corrigé série 26

Exercice 1 (5 points)

a) On a $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -35 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -15 \\ -14 \end{pmatrix}$.

b) On en déduit que le produit vectoriel n'est pas associatif.

c) Par exemple, si $\vec{a} = \vec{e}_1$, $\vec{b} = \vec{c} = \vec{e}_2$, alors

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \wedge \vec{0} = \vec{0} \quad \text{et} \quad (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1.$$

Exercice 2 (3 points)

a) Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors on a

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u_3 v_2 - u_2 v_3 \\ u_1 v_3 - u_3 v_1 \\ u_2 v_1 - u_1 v_2 \end{pmatrix} = -\vec{v} \wedge \vec{u}.$$

b) On a $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ et donc $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$ par le point a).

Exercice 3 (3 points)

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. D'une part on a

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(v_3 + w_3) - u_3(v_2 + w_2) \\ u_3(v_1 + w_1) - u_1(v_3 + w_3) \\ u_1(v_2 + w_2) - u_2(v_1 + w_1) \end{pmatrix},$$

et d'autre part

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w}) = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2 w_3 - u_3 w_2 \\ u_3 w_1 - u_1 w_3 \\ u_1 w_2 - u_2 w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(v_3 + w_3) - u_3(v_2 + w_2) \\ u_3(v_1 + w_1) - u_1(v_3 + w_3) \\ u_1(v_2 + w_2) - u_2(v_1 + w_1) \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (12 points)

a) Cette aire vaut $\|\vec{b} \wedge \vec{c}\| = \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot |\sin \alpha|$ par un théorème du cours.

b) Soit β l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b} \wedge \vec{c}$.

La hauteur h est égale à la norme de la projection $\vec{a}'$ du vecteur $\vec{a}$ sur le vecteur $\vec{b} \wedge \vec{c}$.

On a $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \bullet (\vec{b} \wedge \vec{c})}{\|\vec{b} \wedge \vec{c}\|^2} (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \frac{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b} \wedge \vec{c}\| \cos(\beta)}{\|\vec{b} \wedge \vec{c}\|^2} (\vec{b} \wedge \vec{c})$ et donc $h = \|\vec{a}'\| = \|\vec{a}\| \cdot |\cos(\beta)|$.

Ceci peut aussi se voir trigonométriquement : $h = \|\vec{a}\| \cdot |\cos(\beta)|$.

c) Le volume du parallélépipède vaut le produit de l'aire de la base par la hauteur, soit

$\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot |\sin(\alpha)| \cdot |\cos(\beta)|$, et la valeur absolue du produit mixte vaut

$|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| = |\vec{a} \bullet (\vec{b} \wedge \vec{c})| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b} \wedge \vec{c}\| \cdot |\cos(\beta)| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot |\sin(\alpha)| \cdot |\cos(\beta)|$.

d) $\vec{a} \bullet (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_2 c_3 - c_2 b_3 \\ c_1 b_3 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - c_1 b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + a_2 c_1 b_3 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 c_1 b_2$.

e) On a $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1$,

et on vérifie que c'est bien égal à la quantité du point d).

f) Il suffit de mettre ensemble les résultats des points c) et e).

g) On applique le résultat du point précédent : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$.

h) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -40$ d'où $V = |-40| = 40$.

Exercice 5 (5 points)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$, donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

De plus, $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}$ donc $EFGH$ est un parallélogramme

obtenu par translation du parallélogramme $ABCD$. Donc $ABCDEFGH$ est un parallélépipède.

On peut aussi vérifier que ces deux parallélogramme sont les bases d'un parallélépipède puisque

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Par le cours ou l'exercice précédent, le volume de ce parallélépipède est donné par

$$|\overrightarrow{AB} \bullet (\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE})| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = |2 \cdot (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot (-4)| = 18 [\text{unités}^3].$$

Exercice 6 (3 points)

Rappelons les équivalences suivantes utiles pour décider si quatre points sont coplanaires ou non.

Les points A, B, C, D sont coplanaires. $\iff$ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. $\iff$ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ ne forment pas une base de $\mathbb{R}^3$. $\iff \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$.

$$\text{Ici, } \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \text{ donc les quatre points ne sont pas coplanaires.}$$

Exercice 7 (3 points)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC} \text{ ou alors } \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}, \text{ ainsi } ABCD \text{ est un parallélogramme.}$$

On calcule son aire par le théorème du cours : $\sigma(ABCD) = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = 12$.

Exercice 8 (3 points)

Par un théorème du cours, le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -27 \\ 3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, autrement dit au plan contenant A, B et C .

Exercice 9 (7 points)

On utilise la distributivité du produit vectoriel par rapport à l'addition des vecteurs pour obtenir

$$\vec{0} = \vec{a} \wedge (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \underbrace{\vec{a} \wedge \vec{a}}_{=\vec{0}} + \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{0} + \vec{a} \wedge \vec{b} + \underbrace{\vec{a} \wedge \vec{c}}_{=-\vec{c} \wedge \vec{a}} = \vec{a} \wedge \vec{b} - \vec{c} \wedge \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{a}.$$

La dernière égalité s'obtient de la même façon en partant de $\vec{0} = \vec{b} \wedge (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Si $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, on peut former un triangle de côté $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ et $\|\vec{c}\|$ d'angles opposés α, β et γ .

Comme $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin(\gamma)$, $\|\vec{c} \wedge \vec{a}\| = \|\vec{c}\| \cdot \|\vec{a}\| \sin(\beta)$ et $\|\vec{b} \wedge \vec{c}\| = \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \sin(\alpha)$,

avec $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{c}$, on obtient $\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin(\gamma) = \|\vec{c}\| \cdot \|\vec{a}\| \sin(\beta) = \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \sin(\alpha)$.

Par une division par $\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\|$, on retrouve le théorème du sinus dans un triangle quelconque :

$$\frac{\sin(\gamma)}{\|\vec{c}\|} = \frac{\sin(\beta)}{\|\vec{b}\|} = \frac{\sin(\alpha)}{\|\vec{a}\|}$$

Exercice 10 (6 points)

a) $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Par un théorème du cours,

$$V(ABCD) = \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \right| = |2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 1| = 7.$$

b) Le volume du tétraèdre $V_t = \frac{1}{6} V(ABCD) = \frac{7}{6}$.

c) L'aire vaut la moitié de la somme des aires des parallélogrammes construits sur les paires $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$, $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})$, $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

On utilise alors la formule de l'aire du parallélogramme du théorème du cours :

$$\frac{1}{2} (\|\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DA}\| + \|\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DA}\| + \|\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DB}\| + \|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\|) = \frac{\sqrt{21}}{2} + \sqrt{70} + \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 11 (5 points)

a) $(\vec{b} - \vec{a}) \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{b} - \vec{a}) \wedge \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{b} \wedge \vec{a} - \vec{a} \wedge \vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{b} - \vec{a} \wedge \vec{b} = 2\vec{b} \wedge \vec{a}.$

b) Les vecteurs $\vec{a} + \vec{b}$ et $\vec{b} - \vec{a}$ représentent les deux diagonales du premier parallélogramme. L'aire du parallélogramme construit sur ces deux diagonales vaut $\|(\vec{b} - \vec{a}) \wedge (\vec{a} + \vec{b})\| = 2\|\vec{b} \wedge \vec{a}\|$, qui est bien le double de l'aire du premier parallélogramme.

Exercice 12 (5 points)

Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. D'une part,

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_2 c_3 - c_2 b_3 \\ c_1 b_3 - c_3 b_1 \\ b_1 c_2 - c_1 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2(b_1 c_2 - c_1 b_2) - a_3(c_1 b_3 - c_3 b_1) \\ a_3(b_2 c_3 - c_2 b_3) - a_1(b_1 c_2 - c_1 b_2) \\ a_1(c_1 b_3 - c_3 b_1) - a_2(b_2 c_3 - c_2 b_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_1 c_2 - a_2 c_1 b_2 - a_3 c_1 b_3 + a_3 c_3 b_1 \\ a_3 b_2 c_3 - a_3 c_2 b_3 - a_1 b_1 c_2 + a_1 c_1 b_2 \\ a_1 c_1 b_3 - a_1 c_3 b_1 - a_2 b_2 c_3 + a_2 c_2 b_3 \end{pmatrix},$$

et d'autre part,

$$(\vec{a} \bullet \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\ (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_2 \\ (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2c_2b_1 + a_3c_3b_1 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 \\ a_1c_1b_2 + a_3c_3b_2 - a_1b_1c_2 - a_3b_3c_2 \\ a_1c_1b_3 + a_2c_2b_3 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 \end{pmatrix},$$

d'où l'égalité.

Exercice 13 (5 points)

La base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ n'est pas directe, ce qui signifie que le déterminant $|\vec{f}_1 \vec{f}_2 \vec{f}_3|$ est négatif.

Ce déterminant est égal à $f_{11}f_{22}f_{33} + f_{12}f_{23}f_{31} + f_{13}f_{21}f_{32} - f_{31}f_{22}f_{13} - f_{32}f_{23}f_{11} - f_{33}f_{21}f_{12}$.

- $\det(\vec{f}_1, \vec{f}_2, -\vec{f}_3) = -\det(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ car un coefficient $-f_{i3}$ change le signe de chacun des termes de la somme ci-dessus. Donc la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, -\vec{f}_3)$ est directe.
- $\det(\vec{f}_1, \vec{f}_3, \vec{f}_2) = f_{11}f_{23}f_{32} + f_{13}f_{22}f_{31} + f_{12}f_{21}f_{33} - f_{31}f_{23}f_{12} - f_{33}f_{22}f_{11} - f_{32}f_{21}f_{13}$ qui est à nouveau égal à l'opposé du déterminant de $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$. Donc la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_3, \vec{f}_2)$ est directe.
- On remarque que $\det(\vec{f}_3, \vec{f}_1, \vec{f}_2) = \det(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, donc la base $(\vec{f}_3, \vec{f}_1, \vec{f}_2)$ n'est pas directe.

Exercice 14 (7 points)

- Faux car $\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$ quel que soit $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{b) Faux, le déterminant de la matrice } \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ vaut } -1.$$

C'est la valeur absolue du déterminant qui détermine le volume d'un parallélépipède.

- Vrai. Si les quatre vecteurs sont coplanaires, alors $\vec{a} \wedge \vec{b}$ et $\vec{c} \wedge \vec{d}$ sont tous les deux des vecteurs normaux au plan formé par $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$. Ainsi $\vec{a} \wedge \vec{b}$ et $\vec{c} \wedge \vec{d}$ sont colinéaires.

Ainsi le produit $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \vec{0}$.

- Faux, par exemple, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \wedge \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \vec{0}$ pourtant ces quatre vecteurs ne sont pas coplanaires.

- Vrai car $\vec{a} \bullet \vec{b}$ est un scalaire et donc $(\vec{a} \bullet \vec{b}) \cdot \vec{c}$ est le produit d'un vecteur par un scalaire, donc c'est un vecteur.
- Faux, ce produit n'existe pas ; on peut effectuer le produit vectoriel uniquement entre deux vecteurs, or $\vec{b} \bullet \vec{c}$ est un scalaire et non un vecteur.
- Vrai, $\vec{b} \wedge \vec{c}$ est un vecteur, disons $\vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{d}$, et donc $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{d}$ est un vecteur.