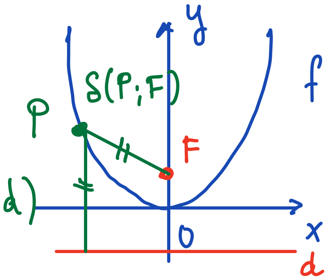
III. Les coniques

$P \in$ parabole

$\iff \delta(P;F) = \delta(P;d)$



$f(x) = ax^2$

1 Rappel sur la parabole

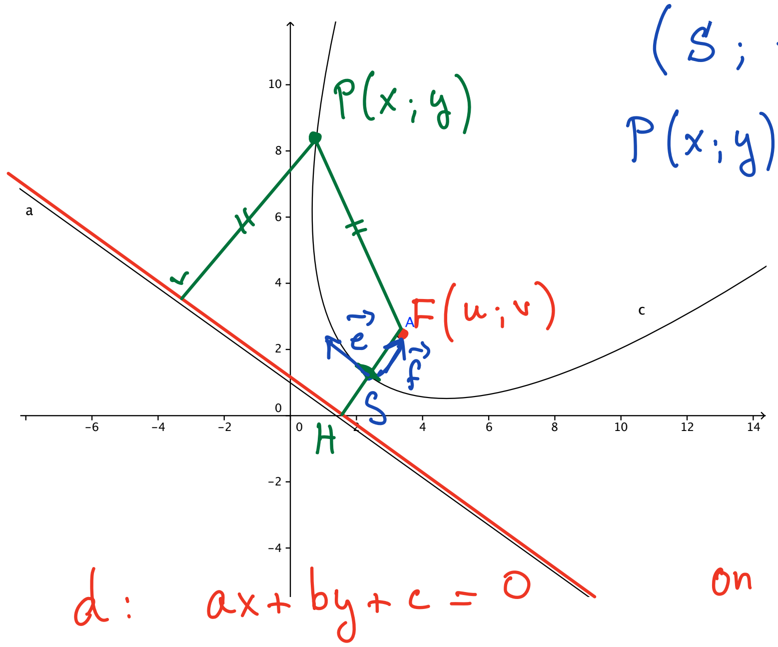
Vous avez défini la parabole de foyer F et de droite directrice d, comme le *lieu géométrique* des points P du plan équidistants de F et de d (on suppose que F n'appartient pas à la directrice). Vous avez vu ensuite que le graphe de toute fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, est une parabole. Pour cela, vous avez translaté le graphe horizontalement pour que son axe de symétrie soit l'axe vertical $x = 0$, puis verticalement pour que son sommet soit le point $(0; 0)$.
La fonction est alors de la forme $f(x) = x^2/2p$, dont le graphe est une parabole de foyer $F(0; p/2)$ et de directrice $y = -p/2$.

$a = \frac{1}{2p}$

Regardons maintenant le cas général d'une parabole donnée par son foyer $F(u; v)$ et sa directrice d'équation $ax + by + c = 0$.

On choisit comme repère de $\mathbb{R}^2$

$(S\,;\,\vec{e}\,;\,\vec{f})$



$P(x;y) \in$ parabole $\iff$

$$y = \frac{x^2}{2p} \iff$$

$$\vec{SP} = x\,\vec{e} + \frac{x^2}{2p}\,\vec{f}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ \frac{x^2}{2p} \end{pmatrix}$$

on pose $x = 2pt$ où $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \vec{SP} = 2pt\,\vec{e} + \frac{(2pt)^2}{2p}\,\vec{f}$$

$$= 2pt\,\vec{e} + 2pt^2\,\vec{f}$$

$P(p_1;p_2)$ $\qquad \delta(P;d) = \dfrac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$d: \ ax+by+c=0$

Pour trouver l'équation générale de la parabole, nous posons simplement l'équation qui traduit l'égalité $\delta(P;F)^2 = \delta(P;d)^2$ que nous élevons au carré pour ne pas trainer des racines carrées. Soit $P(x;y)$ un point de la parabole. Alors

$$\delta(P;F)^2 = (x-u)^2+(y-v)^2 = \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2} = \delta(P;d)^2$$

$$\iff (a^2+b^2)\left[x^2-2ux+u^2+y^2-2yv+v^2\right]-\left(a^2x^2+b^2y^2+c^2+2acx+2abxy+2bcy\right)=0$$

$$\underbrace{b^2}_{\to a^2}x^2+\underbrace{a^2}_{b^2}y^2-2abxy\underbrace{-2\left[(a^2+b^2)u+ac\right]}_{c}x\underbrace{-2\left[(a^2+b^2)v+bc\right]}_{d}y+\underbrace{(a^2+b^2)(u^2+v^2)-c^2}_{e}=0$$

Nous avons donc montré que l'équation générale d'une parabole est une équation quadratique en x et y, d'où le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Une parabole dans $\mathbb{R}^2$ est donnée par une équation cartésienne sous la forme*

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 + cx + dy + e = 0,$$

avec a, b, c, d et e des nombres réels. □

Exemple 1.2. Que détermine l'équation $x^2 - 2xy + y^2 = e^2$? $(a=1,\ b=1,\ c=d=0,\ e\leq 0)$

$$\iff (x-y)^2 = e^2$$

$$\iff x-y = \pm e \iff x-y=e \quad \text{ou} \quad x-y=-e$$

Il s'agit d'une paire de droites parallèles.

Pour terminer avec la parabole, regardons encore son équation *paramétrique*, c'est-à-dire une équation qui ne dépend que d'un paramètre souvent noté t. Le fait qu'il n'y ait qu'un paramètre indique que la parabole est un objet unidimensionnel et la lettre t rappelle le fait que cette équation pourrait représenter celle de la trajectoire d'un objet au cours du temps.

Soit $F(u;v)$ le foyer et d la directrice. Appelons S le point milieu du segment reliant F à sa projection orthogonale sur d. S est le sommet de la parabole. Choisissons un repère orthonormé en S composé de deux vecteurs $\vec{e}$ et $\vec{f}$, où $\vec{f} = \frac{2}{p}\overrightarrow{SF}$ est obtenu en normalisant $\overrightarrow{SF}$.

Nous avons tout fait pour nous ramener à l'équation quadratique $y = \frac{1}{2p}x^2$ et pouvons écrire :

Proposition 1.3. *Une parabole dans $\mathbb{R}^2$ est donnée par une équation paramétrique de la forme suivante, où $(\vec{e}, \vec{f})$ est une base orthonormée, S un point du plan et $p \in \mathbb{R}$:*

$$\overrightarrow{SP}(t) = 2pt\vec{e} + 2pt^2\vec{f}.$$

2 L'hyperbole

Comme pour la parabole, on fixe un point F appelé le foyer et une droite d appelée la directrice.

Définition 2.1. Soit $e > 1$. L'*hyperbole* de foyer F et de directrice d est le lieu géométrique des points P du plan tels que $\delta(P, F) = e\,\delta(P, d)$. On appelle e l'*excentricité* de l'hyperbole.

Pour nous ramener à l'étude analytique de l'hyperbole, nous allons effectuer un changement de repère de sorte à translater le foyer à l'origine et effectuer une rotation pour que la directrice soit verticale d'équation $x = k$.

Pour $P(x; y)$, l'égalité $\delta(P, F) = e\,\delta(P, d)$ $\Longleftrightarrow$ élevée au carré devient $\dfrac{\delta(P;F)}{\delta(P;d)} = e$

$$\delta(P;F)^2 = x^2 + y^2 = e^2(x - k)^2. = e\,\delta(P;d)^2$$

Remarquons qu'il y a deux points S et S' sur la droite passant par F et orthogonale à d qui appartiennent à l'hyperbole. On appelle S et S' les sommets de l'hyperbole. Ils correspondent aux rapports de section $(FD, S) = -e$ et $(FD, S') = e$.

Nous utiliserons plus tard que $\quad \delta(S', d) = \delta(S, d)\,\dfrac{e+1}{e-1}$.

Démontrons-le ici :

$$\delta(S',d) = \underbrace{\delta(S';F)} - \underbrace{\delta(F,S)} - \delta(S;d)$$

déf de l'hyperbole

$$\Longleftrightarrow \quad \delta(S',d) = e\,\delta(S',d) - e\,\delta(S,d) - \delta(S,d)$$

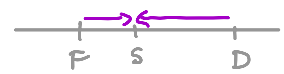
$$\Longleftrightarrow \quad e\,\delta(S;d) + \delta(S;d) = e\,\delta(S';d) - \delta(S';d)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \delta(S;d)(e+1) = \delta(S',d)(e-1)$$

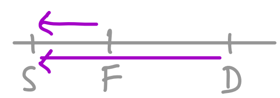
$$\overset{e\neq 1}{\Longleftrightarrow} \quad \delta(S',d) = \delta(S,d)\,\frac{e+1}{e-1}$$

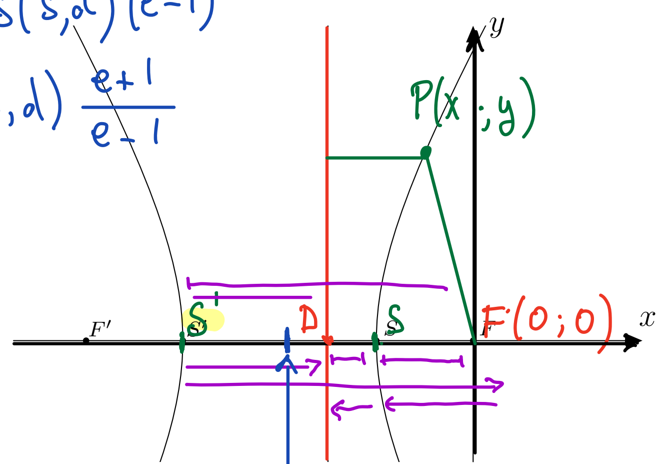
Rappel :

- $(FD,S) = \dfrac{FS}{DS} < 0$ si S est entre F et D



- $(FD,S) = \dfrac{FS}{DS} > 0$ si S n'est pas entre F et D





$M\left(\dfrac{e^2k}{e^2-1}\,;\,0\right)$ milieu de SS'.

On obtient les abscisses des sommets en posant $y = 0$ dans l'équation $x^2 + y^2 = e^2(x-k)^2$:

$$\Rightarrow x^2 = e^2(x-k)^2 \Leftrightarrow e(x-k) = \pm x \Leftrightarrow ex - ek = \pm x$$

$$\Leftrightarrow ek = ex \pm x \Leftrightarrow ek = x(e \pm 1) \Leftrightarrow x = \frac{ek}{e \pm 1} \Leftrightarrow$$

$$S = \left(\frac{ek}{e-1} ; 0\right) \text{ et } S'\left(\frac{ek}{e+1} ; 0\right)$$

Le milieu de S et S' se trouve donc en

$$X_M = \frac{1}{2}\left(\frac{ek}{e-1} + \frac{ek}{e+1}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{ek(e+1+e-1)}{e^2-1} = \frac{2e^2k}{2(e^2-1)} = \frac{e^2k}{e^2-1}$$

Pour obtenir plus de symétrie, nous effectuons une translation horizontale pour amener l'origine en ce point milieu. Nous remplaçons donc x par $X = x - \dfrac{e^2k}{e^2-1}$ et y reste inchangé $Y = y$.

L'équation devient maintenant

$$\left(X + \frac{e^2k}{e^2-1}\right)^2 + Y^2 = e^2\Big(X + \underbrace{\frac{e^2k}{e^2-1} - k}_{= \frac{k}{e^2-1}}\Big)^2$$

$$\Leftrightarrow X^2 + \cancel{2X\frac{e^2k}{e^2-1}} + \frac{e^4k^2}{(e^2-1)^2} + Y^2 = e^2\left(X^2 + \cancel{2X\frac{k}{e^2-1}} + \frac{k^2}{(e^2-1)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow Y^2 = (e^2-1)X^2 + \underbrace{\frac{e^2k^2}{(e^2-1)^2} - \frac{e^4k^2}{(e^2-1)^2}}$$

$$(*) \Leftrightarrow \boxed{Y^2 = (e^2-1)X^2 - \frac{e^2k^2}{e^2-1}} \qquad = \frac{e^2k^2 - e^4k^2}{(e^2-1)^2} = \frac{e^2k^2(\cancel{1-e^2})}{-(e^2-1)^{\cancel{2}}} = \frac{-e^2k^2}{e^2-1}$$

Proposition 2.2. *La médiatrice du segment $[SS']$ est un axe de symétrie de l'hyperbole et le milieu de $[SS']$ est un centre de symétrie.*

Démonstration. Si le point $P(x, y)$ vérifie l'équation ci-dessus, alors $P'(-x, y)$ et $P''(-x, -y)$ aussi.
et $P'''(x ; -y)$ □

Le comportement asymptotique est une autre conséquence de l'équation précédente.

Proposition 2.3. *Les droites d'équation $y = \pm\sqrt{e^2-1}\,x$ sont les asymptotes obliques des courbes d'équation $y^2 = (e^2-1)x^2 + \dfrac{e^2k^2}{1-e^2}$.*

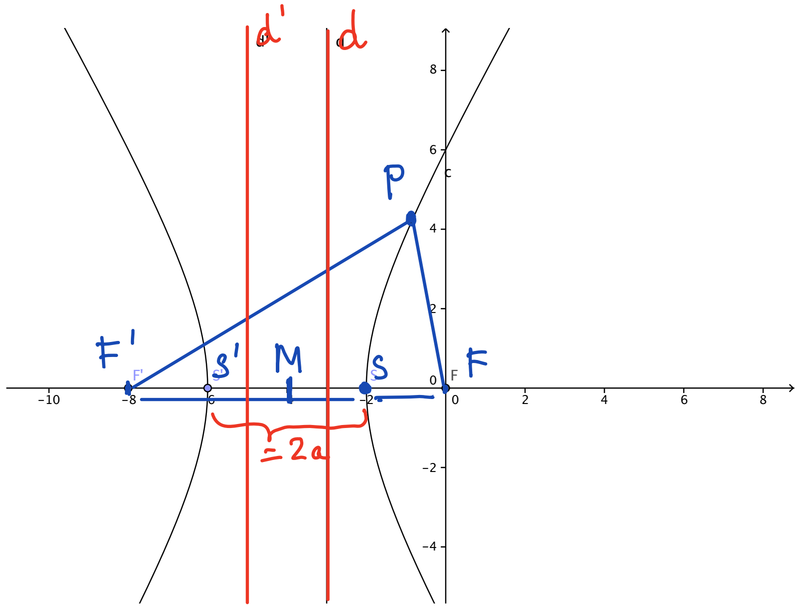
Démonstration. Lorsque x tend vers l'infini, le rapport $\left|\dfrac{y}{x}\right|$ tend vers $\sqrt{e^2-1}$. □

$$(*) \Leftrightarrow \frac{Y^2}{X^2} = e^2 - 1 - \underbrace{\frac{e^2k^2}{(e^2-1)X^2}}_{\xrightarrow{X\to\infty} 0}$$

L'axe de symétrie découvert ci-avant permet de démontrer le caractère *bifocal* de l'hyperbole.

Proposition 2.4. *Soient F et F' deux points distincts et $a > 0$. L'hyperbole de foyer F et dont la distance entre les sommets S et S' vaut $2a$ est le lieu géométrique des points P du plan qui vérifient $|\delta(P,F) - \delta(P,F')| = 2a$.*

Démonstration. Avec les mêmes notations que sur l'illustration précédente (page 3), considérons un point arbitraire P de l'hyperbole. Supposons qu'il se trouve du même côté de d que F (sinon on change les rôles de F et F'). On a donc $\delta(P,F) = e\,\delta(P,d)$.



$\delta(P,F') = e\,\delta(P,d')$ puisque F' et d' sont les symétrique de F et d relativement à M.

Par hypothèse $\delta(S;S') = 2a$

On a montré que $\delta(S',d) \overset{(*)}{=} \delta(S,d)\,\dfrac{e+1}{e-1}$. (page 3)

Ainsi, $\delta(S,S') = \delta(S;d) + \delta(S',d) \overset{(*)}{=} \delta(S;d)\left(1 + \dfrac{e+1}{e-1}\right) = \delta(S,d)\,\dfrac{2e}{e-1}$

Par suite, $\delta(d;d') = \delta(S;S') - 2\,\delta(S;d) = \delta(S,d)\left(\dfrac{2e}{e-1} - 2\right) = \delta(S;d)\,\dfrac{2}{e-1}$

D'où $\delta(P;F') - \delta(P,F) = e\,\delta(P,d') - e\,\delta(P;d) = e\left(\delta(P;d') - \delta(P,d)\right)$

$= e \cdot \delta(d;d') = e\,\dfrac{2}{e-1}\,\delta(S,d) = \delta(S;S') = 2a.$ □

OUF !

p.4 : $\boxed{Y^2 = (e^2-1)X^2 - \frac{e^2k^2}{e^2-1}}$ où $M(0;0)$ $\overset{\cdot\frac{e^2-1}{e^2k^2}}{\iff}$ $Y^2 \cdot \underbrace{\frac{e^2-1}{e^2k^2}}_{\frac{1}{b^2}} = X^2 \cdot \underbrace{\frac{(e^2-1)^2}{e^2k^2}}_{=\frac{1}{a^2}} - 1$

$\iff \boxed{1 = \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2}}$

translation pour $M(u;v)$

La forme canonique de l'équation d'une hyperbole dont les foyers se trouvent sur une droite horizontale est la suivante :

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1.$$

Le point $(u;v)$ est le point milieu des deux foyers.

En translatant ce point en l'origine, on obtient l'équation $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.}$

L'excentricité e de l'hyperbole doit satisfaire $e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$, ou encore $e = \sqrt{b^2/a^2+1} = \cosh(\operatorname{arcsinh}(b/a))$. (*)

La demi-distance entre les deux sommets est a.

Une grandeur importante est $c = \sqrt{a^2+b^2}$, la demi-distance entre les foyers et ainsi, $e = \frac{c}{a}$.

Et pour trouver les directrices, il faut refaire une translation pour mettre le foyer à l'origine !

Quant à l'équation paramétrique, nous en avons vue une en définissant les fonctions de trigonométrie hyperbolique. L'hyperbole dont nous avons écrit l'équation analytique canonique est parcourue par la courbe d'équation

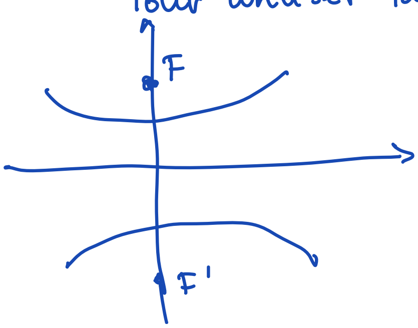
$$f(t) = (\pm a \cosh t + u, b \sinh t + v).$$

Exemple 2.5. Déterminons les caractéristiques de l'hyperbole dont l'équation est $4y^2 - x^2 = 16$. Nous commençons par écrire l'équation sous forme canonique $(\div 16)$

$$\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$$

$b = 4$ et $a = 2$

Pour utiliser la formule $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, on doit permuter x et y.



On a donc une hyperbole centrée en $M(0;0)$ et orientée "verticalement".

Les foyers se trouve sur Oy d'équation $x = 0$.

$e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow e = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

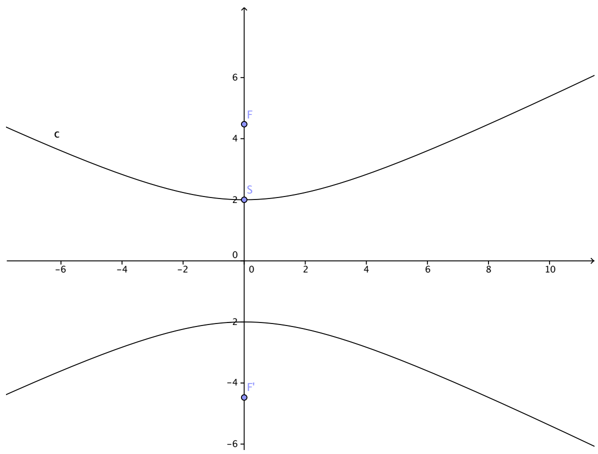
$b^2 = 16 = \frac{e^2k^2}{e^2-1} = \frac{5\cdot k^2}{5-1} = \frac{5}{4}k^2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{64}{5}} = \pm\frac{8\sqrt{5}}{5}$

Sommets : on pose $x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{2^2} = 1 \Rightarrow y = \pm 2$

$S(0;2)$ et $S'(0;-2)$

Foyer en $(0\,;\pm c)$ où $c = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Directrices : $k - c = \frac{8\sqrt{5}}{5} - 2\sqrt{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow y = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$



3 L'ellipse

L'étude de l'ellipse est en tous points similaire à celle de l'hyperbole. Elle correspond au cas où l'excentricité est comprise entre 0 et 1 (strictement).

Définition 3.1. Soit $0 < e < 1$. L'*ellipse* de foyer F et de directrice d est le lieu géométrique des points P du plan tels que $\delta(P, F) = e\,\delta(P, d)$. On appelle e l'*excentricité* de l'ellipse.

Vous verrez en exercice que l'ellipse admet aussi une description bifocale.

Proposition 3.2. *Soient F et F' deux points distincts et $a > 0$. Une ellipse est le lieu géométrique des points P du plan qui vérifient $\delta(P, F) + \delta(P, F') = 2a$.*

La forme canonique de l'équation d'une ellipse dont les foyers se trouvent sur une droite horizontale est la suivante :

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1,$$

avec $a > b$. Le « grand axe » est de longueur $2a$, le « petit axe » de longueur $2b$.

Proposition 3.3. *La distance entre le centre $(u; v)$ de l'ellipse et les foyers vaut* $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Démonstration. Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que le centre est situé en l'origine. L'équation $\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2$ nous permet de calculer l'excentricité car

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Utilisons l'expression bifocale $\delta(P, F) + \delta(P, F') = 2a$ et le point $P(0; b)$.
Puisque le centre est à l'origine, si $F(c; 0)$, alors $F'(-c; 0)$ et on obtient l'équation

$$2\sqrt{b^2 + c^2} = 2a,$$

si bien que $c^2 = a^2 - b^2$. □

Exemple 3.4. Quelle est la courbe d'équation $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$?

Il n'y a pas de termes en xy, ce qui indique que nous pouvons compléter les carrés pour nous ramener à l'équation sous forme canonique :

$$4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 + 8y + 16) = \cancel{-144} \cancel{+ 4 \cdot 36} + \underbrace{9 \cdot 16}_{= 144 \ldots}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(x-6)^2 + 9(y+4)^2 = 144$$

$$\overset{:144}{\Leftrightarrow} \quad \frac{(x-6)^2}{6^2} + \frac{(y+4)^2}{4^2} = 1$$

C'est une ellipse dont le grand axe est horizontal de longueur $2 \cdot 6 = 12$ et le petit axe vertical de longueur $2 \cdot 4 = 8$

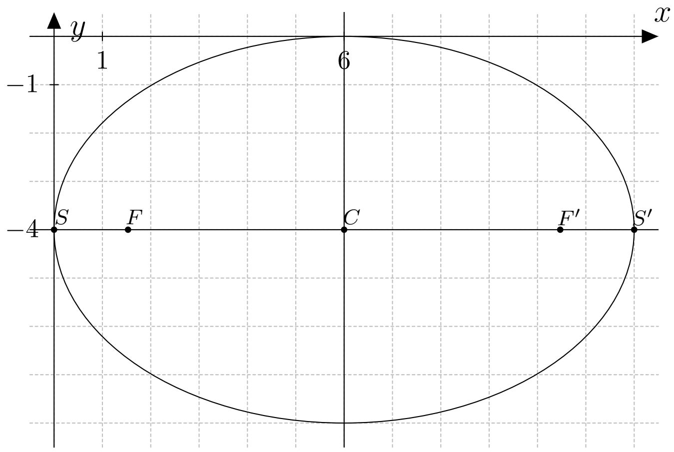
Centre : $(6; -4)$

Sommets : lorsque $y = -4$, $\frac{(x-6)^2}{6^2} = 1 \Leftrightarrow x - 6 = \pm 6 \Leftrightarrow x = 6 \pm 6$

$S_1(0; -4)$ et $S_2(12; -4)$

Foyers : à distance $\sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$ du centre $\Rightarrow$ $6 \pm 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow F_1(6 + 2\sqrt{5}; -4)$ et $F_2(6 - 2\sqrt{5}; -4)$



Résumé :

Parabole : $\delta(P,F) = \delta(P,d)$

Hyperbole :

$\delta(P,F) = e\,\delta(P,d)$, $e > 1$

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$

Centre (u,v)

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$$

$a = \frac{1}{2}$ distance entre S et S'

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = e \cdot a$
$= \frac{1}{2}$ distance entre F et F'

Ellipse

$0 < e < 1$

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$

Centre (u,v)

$$0 < e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$$

$2a$ = grand axe
$2b$ = petit axe

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = e \cdot a$
$= \frac{1}{2}$ distance entre F et F'