

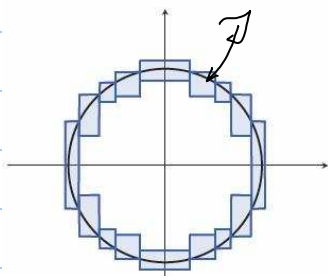
Définition: (Ensemble mesurable au sens de Jordan)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ borné. On dit que D est mesurable au sens de Jordan si la fonction constante égale à un sur D est intégrable au sens de Riemann sur D . Dans ce cas on pose

$$|D| := \int_D 1 \, d\sigma \quad (= \text{aire de } D)$$

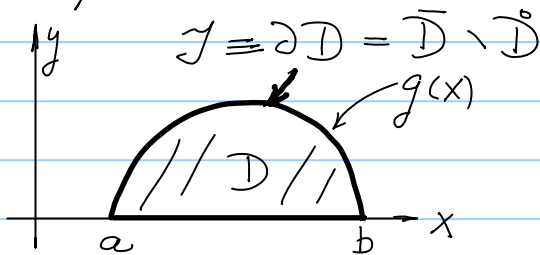
Définition un ensemble borné $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ qui est mesurable au sens de Jordan est appelé Jordan-négligeable si $|\gamma| = 0$

Remarque: un ensemble borné $J \subset \mathbb{R}^2$ est Jordan-négligeable si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un nombre fini de rectangles $D_1, \dots, D_N$, tels que $J \subset \bigcup_{i=1}^N D_i$ et $\sum_{i=1}^N |D_i| \leq \varepsilon$.



Théorème (sans démonstration) Un ensemble borné $D \subset \mathbb{R}^2$ est mesurable au sens de Jordan si et seulement si $\partial D = \bar{D} \setminus \overset{\circ}{D}$ est négligeable au sens de Jordan.

Conséquence:



$$\int_a^b g(x) dx = \int_D 1 \cdot d\sigma.$$

Théorème: soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine compact $D \subset \mathbb{R}^2$ qui est mesurable au sens de Jordan. Alors f est intégrable sur D au sens de Riemann.

Démonstration: c'est une conséquence de la continuité uniforme de f sur D . (voir Analyse I)

10.1.4. Propriétés des intégrales doubles

Proposition: soit $D \subset \mathbb{R}^2$ compact et mesurable au sens de Jordan, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors:

$$1) \int_D (\alpha f + \beta g) d\sigma = \alpha \int_D f d\sigma + \beta \int_D g d\sigma$$

c'est la linéarité de l'intégrale (= additive et homogène).

$$2) \int_D f d\sigma = \int_{\overline{D}_1} f d\sigma + \int_{\overline{D}_2} f d\sigma$$

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset$$

" D_1, D_2 avec bords Jordan-négligeables"

$\overline{D}_1$ = adhérence de D_1

$\overline{D}_2$ = adhérence de D_2

(voir le chapitre 2.3)

3) si $f \leq g$, c.-à-d. si $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in D$ alors

$$\int_D f d\sigma \leq \int_D g d\sigma$$

et donc en particulier

$$-\int_D |f| d\sigma \leq \int_D f d\sigma \leq \int_D |f| d\sigma$$

$$\Leftrightarrow \left| \int_D f d\sigma \right| \leq \int_D |f| d\sigma$$

Démonstration: ce sont des conséquences directes de la définition des intégrales doubles

10.1.5 Théorème de la valeur moyenne

Théorème Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $D \subset \mathbb{R}^2$ compact connexe par arcs et mesurable au sens de Jordan. Alors il existe $(x, y) \in D$ tel que

$$\int_D f \, d\sigma = f(x, y) |D| \quad (*)$$

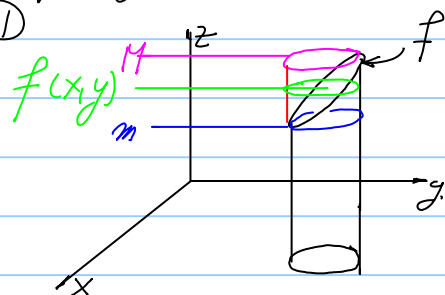
$\swarrow$ aire de D

Démonstration: (voir Analyse I)

$$m = \min_{(x, y) \in D} f(x, y) \leq f(x, y) \leq \max_{(x, y) \in D} f(x, y) = M$$

$\xrightarrow[2]{3}$

$$|D| m \leq \underbrace{\int_D f \, d\sigma}_{|D| \cdot c \text{ avec } c \in [m, M]} \leq |D| M$$



$$\xrightarrow[\text{continue}]{\text{continuité}} \exists (x, y) \in D \text{ tel que } f(x, y) = c$$

connexe par arcs

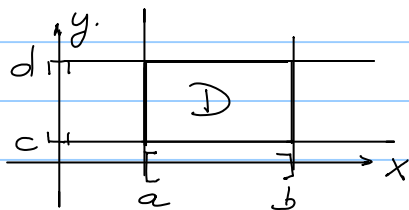
Remarque $(*) \Leftrightarrow \exists (x, y) \in D$ tel que

$$|D| \neq 0 \quad f(x, y) = \frac{1}{|D|} \int_D f \, d\sigma$$

(= valeur moyenne de f sur D)

102. Techniques d'intégration pour les intégrales

Théorème (Fubini) Soit $D = [a, b] \times [c, d]$



et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

l'intégrale $V \equiv \int_D f \, d\sigma$ peut être calculée par intégrations successives :

$$V = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) \quad (**)$$

Explication: on intègre d'abord sur y de "c" à "d" en traitant x comme un paramètre. Le résultat de cette opération est une fonction de x que l'on intègre de "a" à "b".

Remarque: le résultat est indépendant de l'ordre dans lequel les intégrales sont effectuées. V est donc aussi égal à

$$V = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y)$$

Exemple $D = [0, 1] \times [0, 1]$, $f(x, y) = x^2 + y^2$

(on a déjà montré par découpage que $\int_D f d\sigma = \frac{2}{3}$)

$$\begin{aligned}\int_D f d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy (x^2 + y^2) = \\ &= \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \int_0^1 dx \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) = \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3} x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\int_D f d\sigma &= \int_0^1 dy \int_0^1 dx (x^2 + y^2) \\ &= \int_0^1 dy \left[\frac{1}{3} x^3 + y^2 x \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \int_0^1 dy \left(\frac{1}{3} + y^2 \right) = \left[\frac{1}{3} y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

10.2.2. Remarques concernant la notation

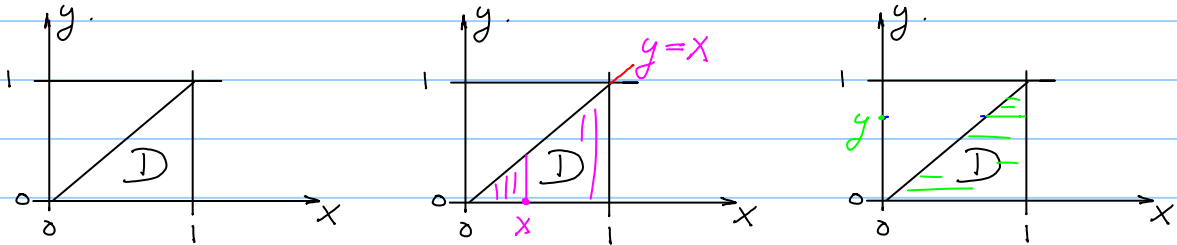
Souvent on trouve au lieu de $(**)$ la notation

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \equiv \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y)$$

et il faut savoir traduire d'une notation à l'autre ! Mais attention toujours écrire les parenthèses si on utilise la notation à gauche !

10.2.3. Intégration sur des domaines plus compliqués

Exemple 1: $f(x,y) = x^2 + y^2$.



$$I = \int_D f \, d\sigma = \frac{1}{3} \quad (= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \text{ par symétrie})$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy (x^2 + y^2) \equiv I_1$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\} \quad (*)$$

$$I = \int_0^1 dy \int_y^1 dx (x^2 + y^2) \equiv I_2$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$$

Mais attention !

Pour (*) on peut aussi écrire

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\} \text{ mais}$$

$$I \neq \int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x,y) \leftarrow \underline{\underline{\text{non sense !}}}$$

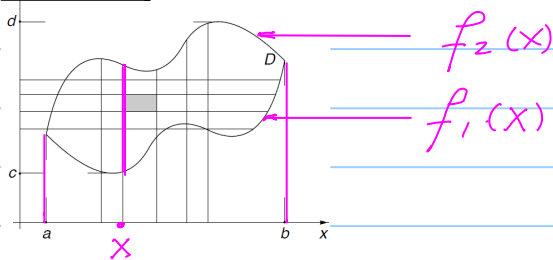
résultat dépend de x

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1 dx (x^3 + \frac{1}{3} x^3) \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 x^3 dx = \frac{4}{3} \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 dy \left[\frac{1}{3} x^3 + y^2 x \right]_{x=y}^{x=1} = \int_0^1 dy \left(\frac{1}{3} + y^2 - \frac{1}{3} y^3 - y^3 \right) \\ &= \left[\frac{1}{3} y + \frac{1}{3} y^3 - \frac{4}{3} \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

10.2.4 Domaines délimités par des graphes

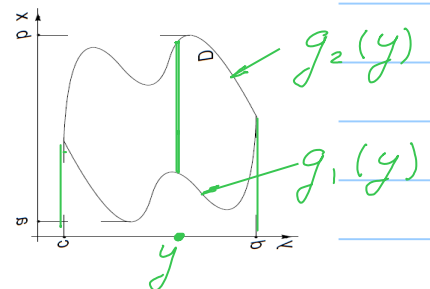
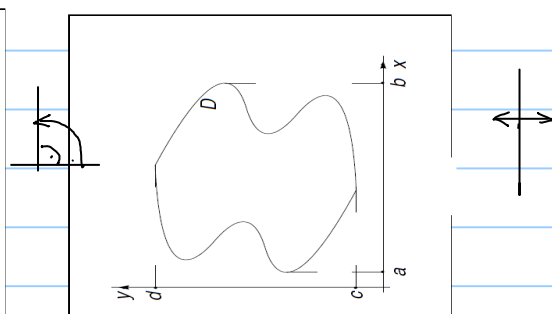
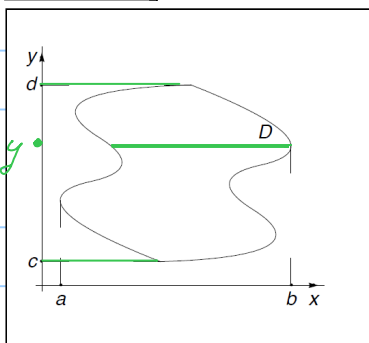
Cas 1



$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \}$$

$$\int_D f \, d\sigma = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy f(x, y)$$

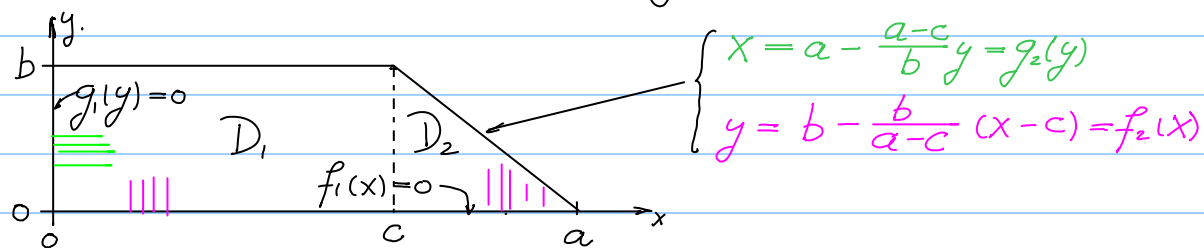
Cas 2



$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \}$$

$$\int_D f \, d\sigma = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} dx f(x, y)$$

Exemple explicite: $f(x,y) = x \cdot y$



$$D = D_1 \cup D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq b, 0 \leq x \leq g_2(y)\}$$

$$\equiv I = \int_D f \, d\sigma = \int_0^b dy \int_0^{a - \frac{a-c}{b}y} dx \, x \cdot y = \dots = (*)$$

ou, par décomposition du domaine:

$$\begin{aligned} I &= \int_{D_1} f \, d\sigma + \int_{D_2} f \, d\sigma = \left(\int_0^c dx \cdot x \right) \cdot \left(\int_0^b dy \cdot y \right) \\ &= \int_0^c dx \int_0^b dy \, x \cdot y + \int_c^a dx \int_0^{f_2(x)} dy \, x \cdot y \\ &= \dots = \text{le même résultat} \end{aligned}$$

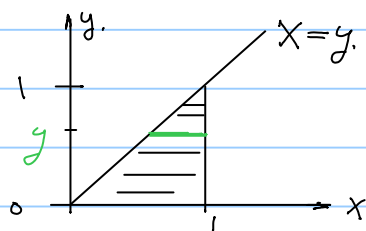
Pour (*) on trouve:

$$\begin{aligned} (*) &= \int_0^b dy \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=0}^{x=a - \frac{a-c}{b}y} = \frac{1}{2} \int_0^b dy \left(a - \frac{a-c}{b}y \right)^2 y \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \left(a^2 - 2a \frac{a-c}{b}y + \left(\frac{a-c}{b} \right)^2 y^2 \right) y \, dy \\ &\quad \text{intégration par parties (par exemple)} \\ &= \frac{1}{4} b^2 c^2 + \frac{1}{6} (a-c) a b^2 - \frac{1}{8} (a-c)^2 b^2 \\ &= \frac{1}{8} b^2 c^2 + \frac{1}{24} a^2 b^2 + \frac{1}{12} a b^2 c \end{aligned}$$

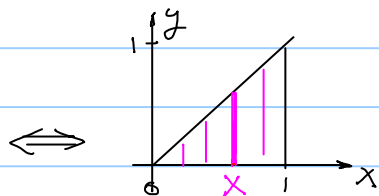
10.2.5 Application du théorème de Fubini

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 \sin(x^2) dx \right) dy = \underbrace{\int_0^1 dy \int_y^1 dx}_{= \textcircled{1}} \sin(x^2)$$

Pas de fonction élémentaire comme primitive de $\sin(x^2)$



$$\textcircled{1} : \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$$



$$\textcircled{2} : \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \sin(x^2) = \int_0^1 dx \left[\sin(x^2) \cdot y \right]_{y=0}^{y=x} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \sin(x^2) \cdot (2x) = \left[\frac{1}{2} (-\cos(x^2)) \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} \cos(1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos(1)) \end{aligned}$$

Transcription du domaine sans le dessin

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{matrix}$$