

Exercice 1 (Correspondance de Galois).

Dans chacun des cas suivantes déterminer le groupe de Galois de l'extension donnée, déterminer tous ses sous-groupes et tous les sous-corps de points fixes correspondants.

1. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{7})$.
2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
3. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.
4. $\mathbb{Q} \subset E$ où E est le corps de décomposition de $t^4 - 2t^2 - 1 \in \mathbb{Q}[t]$.

Indication. Ce corps de décomposition est de degré 8 et on montrera qu'il s'agit de $\mathbb{Q}(\sqrt{1 + \sqrt{2}}, i)$. On explicitera alors un automorphisme d'ordre 2 et un autre d'ordre 4 qui ne commutent pas entre eux, si bien que le groupe de Galois est le groupe diédral d'ordre 8.

Exercice 2.

Soit $K \subseteq L = K(\alpha)$ une extension simple de degré 2 de corps de caractéristique différente de 2.

1. Soit $m_{\alpha, K} = x^2 + bx + c$, où $b, c \in K$. Démontrez que la formule quadratique est valide ici. Cela veut dire les deux racines de $m_{\alpha, K}$ sont $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ et $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$, où $\beta = \sqrt{b^2 - 4c} \in L$ est un quelconque élément tel que $\beta^2 = b^2 - 4c$. Cela inclut l'affirmation que tel β n'existe pas dans K . Concluez que L est une extension par une racine (deuxième) d'un élément adéquat de K .
2. Démontrez que $K \subseteq L$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -galoisienne.
3. Soit $\mathbb{Q} = K \subseteq L$ une extension de corps $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -galoisienne. Démontrez que il existe des entiers rationnels $a, b \neq 0$ et d tel que $L = \mathbb{Q}(\sqrt{a + b\sqrt{d}})$ et $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{a + b\sqrt{d}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
4. Considérons $a, b \neq 0, d \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ et $\alpha = \sqrt{a + b\sqrt{d}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Démontrez que l'extension $K = \mathbb{Q} \subseteq L = \mathbb{Q}(\alpha)$ est $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -galoisienne si et seulement si $\sqrt{a - b\sqrt{d}} \in L$ et $\lambda = a^2 - b^2d$ n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}$.
5. Montrez que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$ est $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -galoisienne.

Exercice 3.

Montrer que tous les groupes finis sont des groupes de Galois. *Indication: il suffit de prouver le cas du groupe S_n ! Pour ce cas en particulier, pensez à permuter les variables de $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$.*

Remarque. En utilisant des techniques de géométrie algébrique et de topologie algébrique on peut montrer que tout groupe fini est réalisé comme un groupe de Galois d'une extension de $\mathbb{C}(t)$.

1. Avec de la géométrie algébrique, on voit que les extensions finies de $\mathbb{C}(t)$ correspondent à des morphismes de courbes algébriques $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ tel que si on enlève un nombre fini de points à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, le morphisme devient un revêtement au sens topologique.
2. $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ privé d'un nombre fini de points est le plan complexe $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points. Par la topologie algébrique, on sait que $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}) \cong F_n$ le groupe libre sur n -générateurs. Dès lors par la théorie des revêtements, comme tout groupe fini G admet une surjection $F_n \rightarrow G$ pour un certain n , il existe un revêtement fini de $\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ avec groupe de Galois égal à G .

3. En retournant à la géométrie algébrique, on obtient alors un morphisme de *courbes algébriques* $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ avec groupe de Galois G et donc une extension de $\mathbb{C}(t)$ avec groupe de Galois G .

Si ce genre de choses vous intrigue, le rédacteur vous encourage à suivre des cours de géométrie algébrique et de topologie algébrique, et/ou à faire des projets dans ces domaines.

Exercice 4.

Soit $n \geq 1$. Calculez le groupe de Galois $\text{Gal}(L_n/\mathbb{C}(t))$ où L_n est le corps de décomposition de

$$f = X^{2n} - 2 \left(\frac{t+1}{t-1} \right) X^n + 1,$$

de la manière suivante:

1. Montrez qu'il existe des automorphismes $\mathbb{C}(\sqrt{t}) \rightarrow \mathbb{C}(\sqrt{t})$ envoyant $\sqrt{t}$ sur $\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}$ et $\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-1}$.
2. Dédisez que les polynômes $X^n - \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}$ et $X^n + \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}$ sont irréductibles sur $\mathbb{C}(\sqrt{t})$, et que f est irréductible sur $\mathbb{C}(t)$.
3. Montrez que

$$L_n = \mathbb{C}(t) \left(\sqrt[n]{\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-1}} \right).$$

4. Posons $\xi_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et

$$x = \sqrt[n]{\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-1}}.$$

Montrez qu'il existe $r, s \in \text{Gal}(L_n/\mathbb{C}(t))$ tel que $r(x) = \xi_n x$ et $s(x) = \frac{1}{x}$.

5. Dédisez que $\text{Gal}(L_n/\mathbb{C}(t)) \cong D_{2n}$.