Série 30

$*$ **Exercice 1. Indépendance linéaire et déterminants.**

a) Retrouve dans ton cours la définition du déterminant d'une matrice 2×2 et 3×3.

b) On considère deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ de V_2. Montre que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants si et seulement si le déterminant $\det(\vec{u}; \vec{v})$ de la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est non nul. Conclus que pour $\vec{u}, \vec{v} \in V_2$,

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) \neq 0 \iff \mathcal{B} = (\vec{u}; \vec{v}) \text{ est une base de } V_2.$$

c) On considère trois vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ de V_3. Montre que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants si et seulement si le déterminant $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ de la matrice $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ est non nul. Conclus que pour $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$,

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \neq 0 \iff \mathcal{B} = (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \text{ est une base de } V_3.$$

Exercice 2. On considère dans l'espace $\mathbb{R}^3$ les points $A = (5; 0; 0)$, $B = (0; 0; 7)$, $C = (2; 2; 2)$, $D = (1; 1; 1)$ et $E = (1; 2; 3)$.

On travaille avec la base $\mathcal{B} = (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ de V_3 formée des vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Démontre qu'il s'agit bien d'une base.

b) Calcule les composantes dans $\mathcal{B}$ des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$.

c) Dessine dans V_3, en perspective cavalière, les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ et le vecteur $\overrightarrow{OC}$.

Exercice 3. Exprime le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. On se donne les vecteurs $\vec{a} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -16 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 18 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$. Résous l'équation suivante littéralement, puis calcule les composantes de la solution :

$$\tfrac{3}{4}\vec{b} - \tfrac{1}{2}\vec{a} = \tfrac{9}{10}\left(\tfrac{1}{12}\vec{x} + \tfrac{5}{3}\vec{b}\right) - 2\vec{a}$$

Exercice 5. Pour quelles valeurs du paramètre m les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

$$\begin{pmatrix} m \\ 2m-1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ m+2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Pour quelles valeurs du paramètre m les vecteurs suivants sont-ils coplanaires ?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} m \\ -1 \\ 2m+3 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Pour quelles valeurs du paramètre m les vecteurs suivants sont-ils coplanaires ?

$$\begin{pmatrix} 9m \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 8 \\ m^2 \\ m \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Normalisation d'un vecteur. Soit $\vec{u}$ un vecteur non-nul de V_n. Montre que le vecteur $\frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$ est un vecteur *unitaire* (c'est-à-dire de norme égale à 1) de même sens et même direction que $\vec{u}$. Ce vecteur unitaire est la *normalisation de* $\vec{u}$.

Normalise les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de V_2 et $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ de V_3.

Exercice 9. Les polynômes comme espace vectoriel. Nous travaillons dans $\mathbb{R}[x]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes en une indéterminée x. Considérons l'ensemble P_2 des polynômes de degré ≤ 2.

a) Montre que P_2 est un espace vectoriel.

b) Montre que le triplet de polynômes $(1; x; x^2)$ forme une base de P_2.

c) Montre que le triplet de polynômes $(1-x; 1+x; x)$ ne forme pas une base de P_2.

d) Montre que le triplet de polynômes $(1+x; 1+x+x^2; 1)$ forme une base de P_2.

Exercice 10. Reporte dans $\mathbb{R}^2$, muni du repère usuel (considère une grille graduée horizontalement de -6 à 13 et verticalement de -3 à 11), les points $A = (3; -1)$, $B = (-3; 0)$, $C = (10; 10)$, $D = (-5; 5)$, $E = (7; 0)$. Soit maintenant la base $\mathcal{B} = (\vec{v}; \vec{w})$ de V_2 formée des vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Démontre qu'il s'agit bien d'une base.

b) Calcule algébriquement les composantes dans $\mathcal{B}$ des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$.

c) Trouve géométriquement (en effectuant une construction à la règle sur la grille) les mêmes composantes. Explique la construction que tu effectues.

Exercice 11. On considère les points $A = (5; 2)$, $B = (6; -3)$, $C = (7; 8)$, $D = (3; 8)$, $E = (5; -6)$ et $F = (-1; 36)$. Détermine si les points A, B et C sont alignés et explique ton raisonnement. Fais de même pour les points D, E et F.

Exercice 12. On considère les points $A = (3; 4; 5)$, $B = (9; -18; -15)$ et $P = (12; -14; -10)$. Détermine si ces trois points sont alignés et, si c'est le cas, calcule le rapport de section (AB, P).

Exercice 13. On considère les points $A = (-2; -1)$, $B = (7; 0)$ et $C = (1; 5)$. Calcule les coordonnées du quatrième sommet du parallélogramme $ABCD$.