Exercice 1. Un vecteur non-nul $\vec{v} = (a_1)$ de V_1 est linéairement indépendant (si $\lambda \cdot \vec{v} = \vec{0}$, alors $\lambda = 0$ car $a_1 \neq 0$) et engendre n'importe quel autre vecteur de $\mathbb{R}$ (pour $\vec{w} = (b_1)$, on a $\frac{b_1}{a_1} \cdot \vec{v} = \vec{w}$). Ainsi, l'ensemble des bases de V_1 est $V_1 \backslash \{0\}$. La raison pour laquelle on exclut 0 est qu'il est impossible de générer un vecteur quelconque avec un multiple de 0.

Exercice 2.

a) Non, car par exemple le vecteur $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire des deux vecteurs donnés. En effet, $\alpha \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ n'a pas de solution.

b) Oui, soit $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de V_2, alors l'équation vectorielle $x \cdot \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ admet comme solution $x = \dfrac{3\,a - 2\,b}{2}$, $y = -\dfrac{5\,a - 4\,b}{4}$, ce qui prouve que le vecteur quelconque $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux vecteurs donnés.

c) Non car une combinaison linéaire de ces deux vecteurs formera toujours un vecteur de la forme $\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$.

d) Oui, soit un vecteur quelconque $\vec{v} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ de V_4, alors l'équation vectorielle

$$x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

admet comme solution :

$$x = \frac{-d + 3\,c + b + a}{4},\ y = -\frac{-d - c - 3\,b + a}{4},\ z = -\frac{-d - c + b + a}{4},\ t = \frac{d - c - b + a}{2},$$

ce qui prouve que le vecteur quelconque $\vec{v}$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des cinq vecteurs donnés. (On n'a pas pris en compte le quatrième vecteur qui est la somme des deux premiers.)

Exercice 3.

a) Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants car l'un n'est pas multiple de l'autre ; il n'en existe donc pas de combinaison linéaire non-triviale donnant le vecteur nul. Ces 2 vecteurs forment donc une base de V_2 en vertu d'une proposition du cours.

b) Comme $1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, les deux vecteurs sont colinéaires, et ne peuvent donc pas former une base de V_2.

c) On a $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, ainsi $2 \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Ce calcul nous montre que les trois vecteurs sont linéairement dépendants, ils sont donc coplanaires et ne peuvent ainsi pas former une base de V_3.

d) De la même manière, $\begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$, ainsi $5 \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et donc ces vecteurs ne forment pas une base de V_3.

e) Comme $2 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, les vecteurs ne forment pas une base de V_3.

f) Les 3 vecteurs sont linéairement indépendants et par une proposition du cours, ils forment une base de V_3. Pour voir qu'ils sont linéairement indépendants, résous l'équation vectorielle $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; on obtient bien $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (le vecteur nul ne peut pas être exprimé comme combinaison linéaire non-triviale de ces vecteurs).

Exercice 4. On observe que $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ce calcul montre que le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ appartient au plan formé par $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ puisqu'il s'exprime comme combinaison linéaire de ceux-ci. Ainsi les trois vecteurs sont coplanaires.

Exercice 5.

a) Faux, car une base de V_3 contient toujours trois vecteurs, tandis que dans V_2 trois vecteurs sont toujours linéairement dépendants.

b) Vrai, car par hypothèse $(\vec{u}, \vec{v})$ forment une base de V_2, ils forment donc en particulier un système de générateurs et donc tout vecteur de V_2 peux s'exprimer comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ainsi ajouter un (ou plusieurs) vecteur(s) à la liste ne change pas le fait que c'est un système de générateurs (par contre $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont forcément linéairement dépendants).

c) Vrai, car le vecteur $\vec{0}$ est toujours linéairement dépendant de tout autre vecteur, il ne peut donc pas faire partie d'une base.

d) Faux, si $\vec{w} = \vec{0}$ alors il n'existe aucun vecteur de V_2 qui ne soit pas colinéaire à $\vec{w}$ et donc aucune base ne le contenant.

e) Vrai, en effet soit $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors par exemple, le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est tel que $(\vec{v}; \vec{w})$ forme une base de V_2.

f) Faux, si $\vec{w} = \vec{0}$ alors il n'existe aucun vecteur de V_3 qui ne soit pas colinéaire à $\vec{w}$ et donc aucune base ne le contenant.

g) Vrai, en effet on peut toujours choisir un autre vecteur $\vec{v}$ de V_3 qui ne soit pas colinéaire à $\vec{w}$ et un troisième vecteur $\vec{u}$ non coplanaire au plan formé par $(\vec{w}; \vec{v})$, par exemple en prenant $\vec{u}$ normal à ce plan.

h) Faux. Voir le point suivant, où même 4 tels vecteurs ne suffisent pas pour engendrer V_3.

i) Faux. Par exemple, les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont deux à deux linéairement indépendants, mais n'engendreront jamais un vecteur dont la troisième composante est non-nulle. En fait, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les vecteurs $\vec{v_k} = \begin{pmatrix} \cos(k\pi/n) \\ \sin(k\pi/n) \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $k = 0, \dots n-1$ forment une famille de n vecteurs deux à deux linéairement indépendants qui n'engendre pas V_3.