© César, Musée d'Art Contemporain, Marseille
Photo: markovdz sur flickr

Information, Calcul et Communication

Compression de données : Introduction

École polytechnique fédérale de Lausanne

Olivier Lévêque

Pourquoi donc vouloir compresser des données ?

Deux raisons principales :

- Pour réduire l'espace utilisé lors du stockage de ces données
- Pour réduire le temps de transmission de ces données

Quels types de données peuvent être compressées ?

- Les textes
- Les sons
- Les images
- Les vidéos
- En général, tout type de données numériques !

Deux types de compression

- **Compression sans pertes :** lorsqu'on désire retrouver l'intégralité des données stockées sous forme compressée

- **Exemples :** billets pour un concert, bulletins de vote, articles scientifiques

- **Compression avec pertes :** lorsqu'on n'est pas tant à cheval que ça sur les détails et qu'on s'autorise un peu de distorsion

- **Exemples :** morceaux de musique au format mp3, partage de photos sur le web, vidéos YouTube…

Compression sans pertes

- Aussi étrange que cela puisse paraître, il est possible de réduire la taille d'un fichier informatique…
- …sans pour autant perdre la moindre information à propos du fichier !
- L'idée de base consiste à supprimer/réduire la redondance présente dans les données en abrégeant les motifs qui reviennent souvent dans celles-ci.

La langue française est pleine de redondance !

Pour preuve, voici deux phrases :

~~Cette première phrase dont les lettres ont été à moitié effacées est encore parfaitement lisible.~~

Si on liasse la perimère et la drnièree ltretes à la bnnoe pclae dnas cquahe mot, arols ctete sncedone prshae est asusi pfatitaerment liiblse (ou psqeure!)

Pourquoi tant de redondance ?

- pour mieux se comprendre, tout simplement !
- pour être capable de lire un texte contenant des fotes d'ortografe.

Exemples de compression dans la vie de tous les jours

- **Langage SMS :** “slt”, “tqt”, “mdr”, …
- **Code Morse :** A = “.-”, E = “.”, S = “…”, T = “-”,
  tandis que X = “-..-”, Z = “--..”
- **Acronymes :** EPFL, UNIL, …

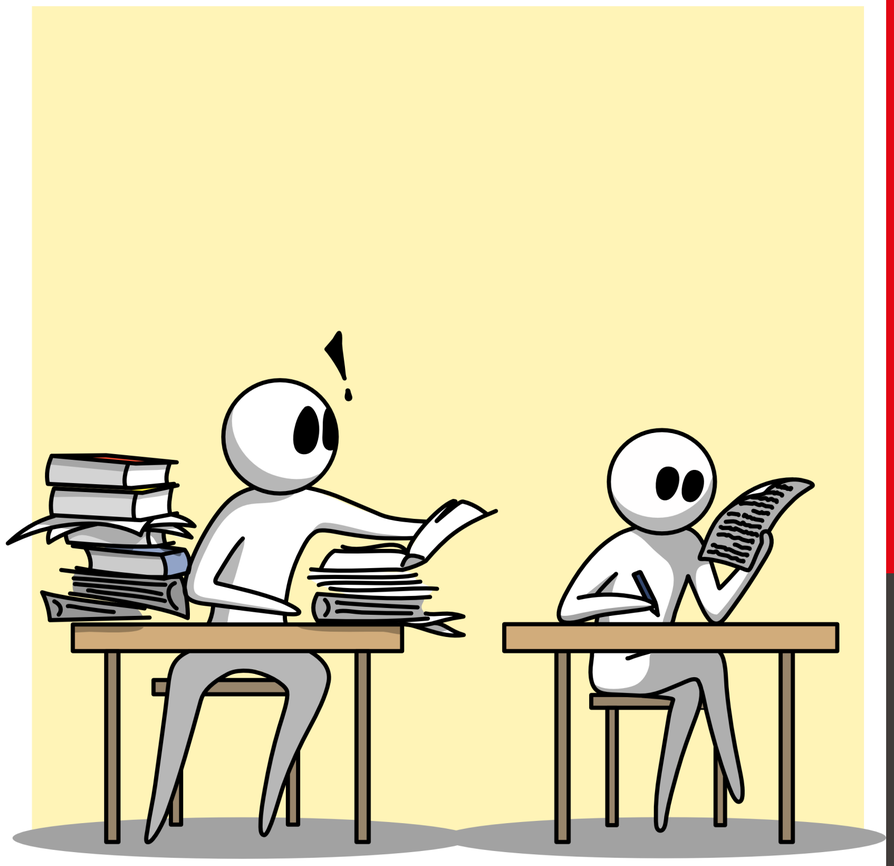
Exemple de compression (sans pertes)

Essayons d'encoder les séquences de lettres MONTREUX et LAUSANNE sous la forme de séquences de 0 et de 1 :

- La séquence MONTREUX a huit lettres différentes : il n'y a donc pas de choix pour cette séquence : 3 bits par lettre sont nécessaires (par exemple : M ↔ 000, O ↔ 001, etc.) et donc $3\ x\ 8 = 24$ bits en tout.

- Dans la séquence LAUSANNE par contre, les lettres A et N se répètent chacune deux fois ; on peut donc abréger la représentation de celles-ci en utilisant le code suivant (par exemple) : A ↔ 11, N ↔ 10, L ↔ 000, S ↔ 001, U ↔ 010, E ↔ 011.

  Cette représentation n'utilise que $2\ x\ 4\ + 3\ x\ 4 = 20$ bits en tout.



Information, Calcul et Communication

Entropie

École polytechnique fédérale de Lausanne

Olivier Lévêque

Exemple 1

Voici une séquence de 16 lettres :

A B C D E F G H I J K L M N O P

Jeu n° 1 :

Deviner quelle lettre a été tirée au hasard en posant un nombre minimum de questions binaires, auxquelles on ne répond que par oui ou par non.

Q1 : A – H ? oui 8 poss.
Q2 : A – D ? oui 4 poss.
Q3 : A – B ? non 2 poss
Q4 : C ? oui ✓ 1 poss

entropie
$= 4 = \log_2(16)$

Exemple 1

Voici une séquence de 16 lettres :

A B C D E F G H I J K L M N O P

Jeu n° 1 :

Deviner quelle lettre a été tirée au hasard en posant un nombre minimum de questions binaires, auxquelles on ne répond que par oui ou par non.

Solution :

- 4 questions sont nécessaires (algorithme de dichotomie).
- On dit que l'entropie de cette séquence est égale à 4.
- Remarquez que $16 = 2^4$, autrement dit : $4 = \log_2(16)$

Exemple 2

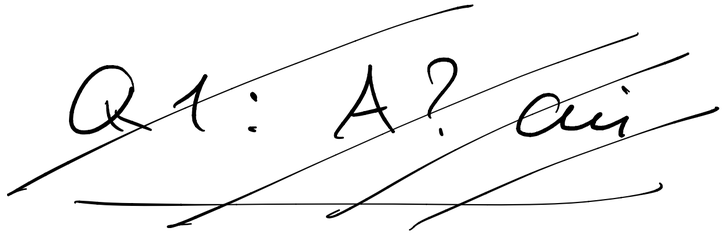
Voici une autre séquence de 16 lettres (sans compter les espaces):

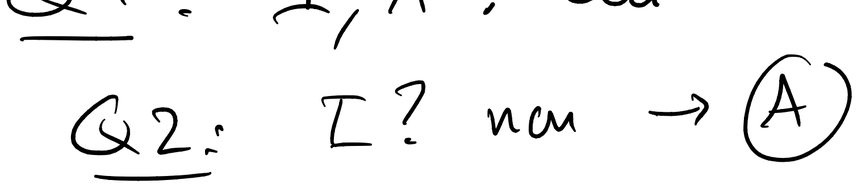
IL FAIT BEAU A IBIZA

Jeu n° 2 : Le jeu est le même qu'avant !

Remarques:

- La position de la lettre est tirée au hasard, de manière uniforme.
- Il ne faut deviner que la lettre elle-même (I, L, F, A, …), pas sa position.





Exemple 2

Voici une autre séquence de 16 lettres (sans compter les espaces):

IL FAIT BEAU A IBIZA

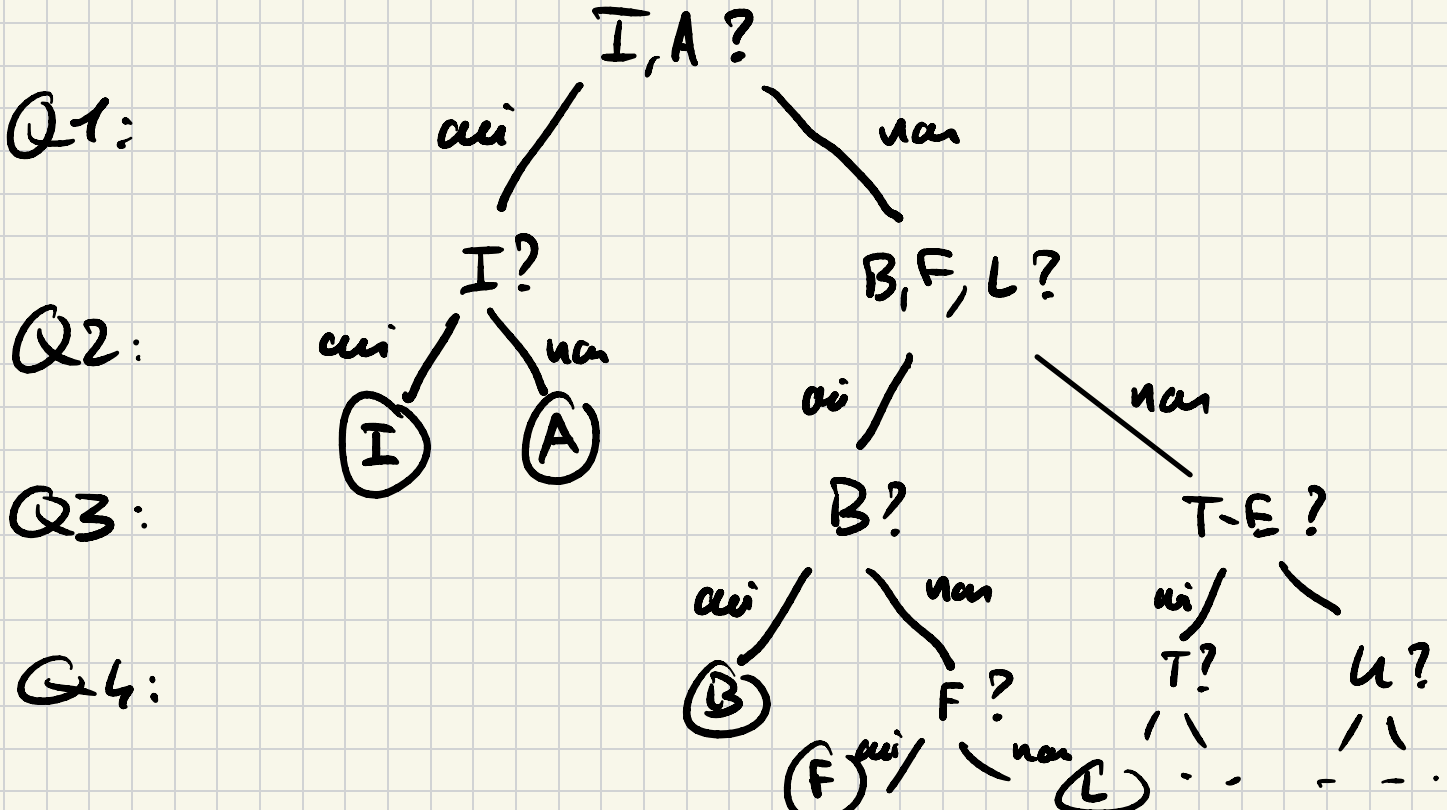
Jeu n° 2 : Le jeu est le même qu'avant !

Remarques:

- La position de la lettre est tirée au hasard, de manière uniforme.
- Il ne faut deviner que la lettre elle-même (I, L, F, A, …), pas sa position.

Combien de questions binaires *en moyenne*
sont-elles nécessaires pour deviner la lettre ?

lettre	I	A	B	F	L	T	E	U	Z
nb d'app.	4	4	2	1	1	1	1	1	1
	Q2		Q1	Q3		Q2			



lettre	I	A	B	F	L	T	E	U	Z
nb d'app.	4	4	2	1	1	1	1	1	1
nb de questions	2	2	3	4	4	4	4	4	4

nb moyen de questions à poser :

$$\frac{8}{16} \cdot 2 + \frac{2}{16} \cdot 3 + \frac{6}{16} \cdot 4 = \frac{16+6+24}{16} = \frac{46}{16}$$

I, A B F, L, T, E, U, Z $= 2{,}875$

entropie

Exemple 2

IL FAIT BEAU A IBIZA

Solution: classer les lettres dans l'ordre décroissant du nombre d'apparitions dans la séquence :

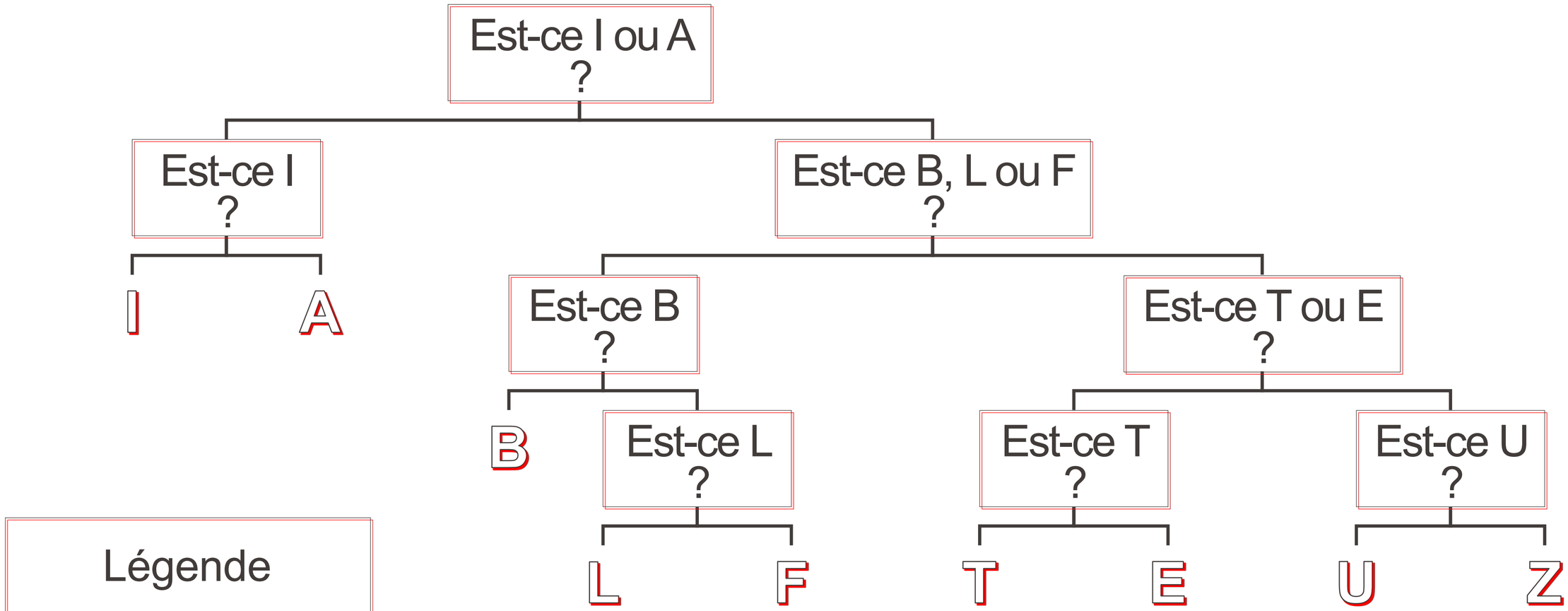
Lettre	I	A	B	L	F	T	E	U	Z
Nombre d'apparitions	4	4	2	1	1	1	1	1	1

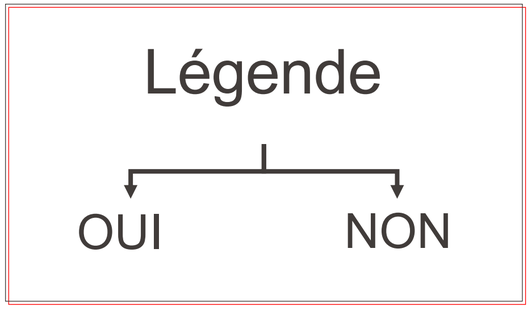
Idée (dichotomie plus générale) : séparer l'ensemble des lettres en deux parties égales en tenant compte de leur nombre d'apparitions, ce qui donne :

- **Question n° 1 :** Est-ce que la lettre est **un I ou un A** ?
  - Si la réponse est **oui** : **Question n° 2:** Est-ce que la lettre est **un I** ?
  - Si la réponse est **non** : **Question n° 2:** Est-ce que la lettre est **un B, L ou F** ?

  etc.

Exemple 2 : Arbre des questions





Exemple 2 : Solution

Lettre	I	A	B	L	F	T	E	U	Z
Nombre d'apparitions	4	4	2	1	1	1	1	1	1
Nombre de questions	2	2	3	4	4	4	4	4	4

Nombre de questions à poser en moyenne :

$$= 2 \cdot \frac{4}{16} \cdot 2 + 1 \cdot \frac{2}{16} \cdot 3 + 6 \cdot \frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{16 + 6 + 24}{16} = \frac{46}{16} = 2.875$$

On dit que l'entropie de cette séquence est égale à 2.875.

Exemple 3

Voici encore une autre séquence de 16 lettres :

A A A A A A A A A A A A A A A A

Jeu n° 3: Le jeu est encore le même qu'avant !

- Cette fois-ci, aucune question n'est nécessaire pour deviner la lettre choisie!
- On dit que l'entropie de cette séquence est égale à 0.

Retour à l'exemple 2

Lettre	I	A	B	L	F	T	E	U	Z
Nombre d'apparitions	4	4	2	1	1	1	1	1	1
Nombre de questions	2	2	3	4	4	4	4	4	4

Remarques :

- Pour deviner une lettre qui apparaît 1 fois sur 16, on a besoin de 4 questions. $4 = \log_2(16)$
- Pour deviner une lettre qui apparaît 2 fois sur 16 (i.e. 1 fois sur 8), on a besoin de 3 questions. $3 = \log_2(8)$
- Pour deviner une lettre qui apparaît 4 fois sur 16 (i.e. 1 fois sur 4), on a besoin de 2 questions. $2 = \log_2(4)$

En résumé : pour deviner une lettre qui apparaît avec une probabilité p, on a besoin de $\log_2\left(\frac{1}{p}\right)$ questions.

Entropie : Définition générale

- Soit X une séquence de lettres provenant d'un alphabet $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.
- Soit p_j la probabilité d'apparition de la lettre a_j dans la séquence X (remarquez que $0 \leq p_j \leq 1 \; \forall j$ et que $p_1 + \cdots + p_n = 1$).

L'entropie de la séquence X est définie par :

$$H(X) = p_1 \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_1}\right) + \cdots + p_n \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_n}\right)$$

Remarque : par convention, si $p_j = 0$, alors on pose $p_j \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_j}\right) = 0$.

Entropie : Exemple

Lettre	I	A	B	L	F	T	E	U	Z
Nombre d'apparitions	4	4	2	1	1	1	1	1	1
Nombre de questions	2	2	3	4	4	4	4	4	4

$$H(X) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \log_2(4) + 1 \cdot \frac{1}{8} \cdot \log_2(8) + 6 \cdot \frac{1}{16} \cdot \log_2(16) = 2.875$$

Notez qu'en général, l'entropie ne coïncide pas avec le nombre moyen de questions binaires à poser pour deviner une lettre !

Exemple : Trouver une lettre tirée au hasard dans la séquence ABB nécessite exactement 1 question binaire, mais

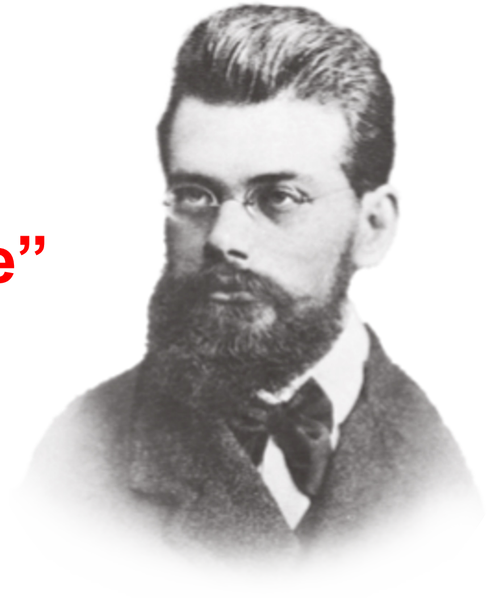
$$H(X) = \frac{1}{3} \cdot \log_2(3) + \frac{2}{3} \cdot \log_2\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 0.92$$

Origines de la notion d'entropie

Origine en physique (Boltzmann, 1872) :

L'entropie mesure le "désordre" dans un système physique.

- Ludwig Boltzmann (1844-1905)
- ardent défenseur de l'existence des atomes
- père de la physique statistique



Origines de la notion d'entropie

Origine en physique (Boltzmann, 1872) :

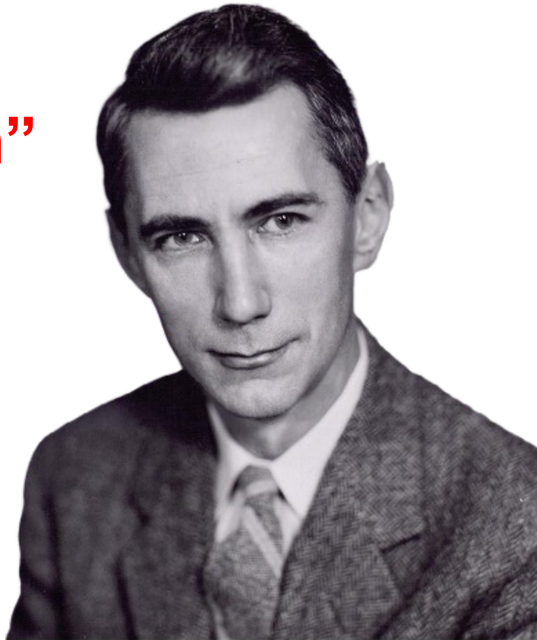
L'entropie mesure le "désordre" dans un système physique.

- Ludwig Boltzmann (1844-1905)
- ardent défenseur de l'existence des atomes
- père de la physique statistique

Théorie de l'information (Shannon, 1948) :

L'entropie mesure la "quantité d'information" contenue dans un signal.

- Claude Shannon (1916-2001)
- mathématicien, ingénieur électricien, cryptologue,
- père de la théorie de l'information, jongleur...



Interprétation de la notion d'entropie

A B C D E F G H I J K L M N O P $H(X) = 4$

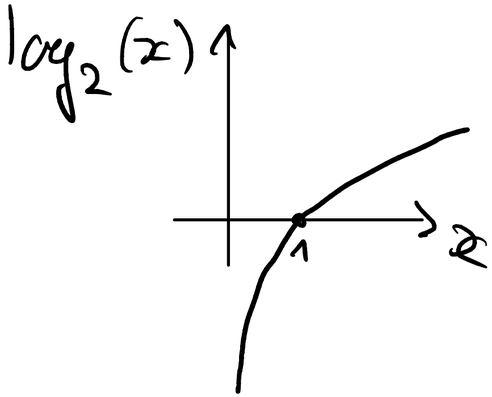
IL FAIT BEAU A IBIZA $H(X) = 2.875$

A A A A A A A A A A A A A A A A $H(X) = 0$

- Plus il y a de lettres différentes, plus il y a de désordre, plus il y a de **nouveauté** et donc "**plus d'information**" dans le message.

- Plus il y a de lettres semblables, moins il y a de désordre, plus il y a de **redondance** et donc "**moins d'information**" dans le message.

Quelques propriétés de l'entropie



$$H(X) = p_1 \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_1}\right) + \cdots + p_n \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_n}\right)$$

- Pour une probabilité d'apparition $0 \leq p \leq 1$ donnée, $\log_2\left(\frac{1}{p}\right) \geq 0$.

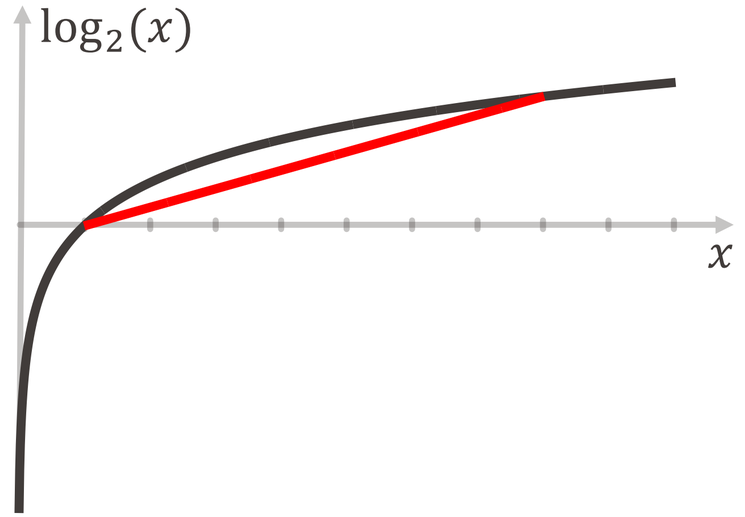
Quelques propriétés de l'entropie

$$H(X) = p_1 \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_1}\right) + \cdots + p_n \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_n}\right)$$

- Pour une probabilité d'apparition $0 \leq p \leq 1$ donnée, $\log_2\left(\frac{1}{p}\right) \geq 0$.
- $H(X) \geq 0$ en général, et $H(X) = 0$ si et seulement si l'ordre est total (c'est-à-dire si toutes les lettres sont les mêmes).
- Si n est la taille de l'alphabet utilisé, $H(X) \leq \log_2(n)$ en général et $H(X) = \log_2(n)$ si et seulement si le désordre est total (c'est-à-dire si toutes les lettres sont différentes).

Quelques propriétés de l'entropie

Vérifions que $H(X) \leq \log_2(n)$ en général :



- Remarquez que la fonction $f(x) = \log_2(x)$ est concave pour $x \geq 0$

- En particulier, ceci veut dire que :

$$\frac{\log_2(x_1)+\log_2(x_2)}{2} \leq \log_2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \quad \forall x_1, x_2 \geq 0$$

- Plus généralement, si $0 \leq p_1, p_2 \leq 1$ et $p_1 + p_2 = 1$, alors :

$$p_1 \cdot \log_2(x_1) + p_2 \cdot \log_2(x_2) \leq \log_2(p_1 x_1 + p_2 x_2) \quad \forall x_1, x_2 \geq 0$$

Quelques propriétés de l'entropie

Vérifions que $H(X) \leq \log_2(n)$ en général : (suite)

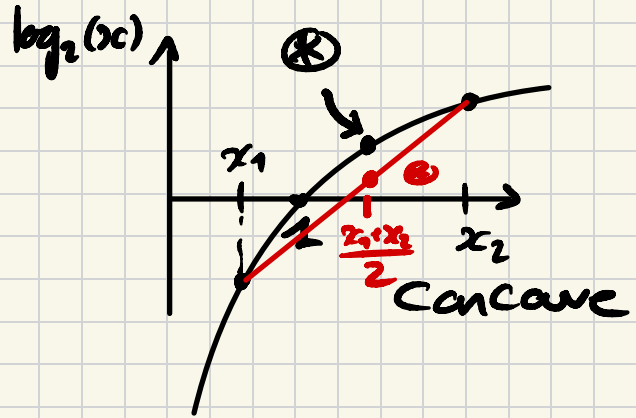
- Plus généralement encore, si $0 \leq p_j \leq 1$ et $p_1 + \cdots + p_n = 1$, alors

$$p_1 \cdot \log_2(x_1) + \cdots + p_n \cdot \log_2(x_n) \leq \log_2(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n) \quad \forall x_1, \ldots, x_n \geq 0$$

- En appliquant cette inégalité avec $x_j = \frac{1}{p_j}$, on obtient finalement :

$$H(X) = p_1 \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_1}\right) + \cdots + p_n \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_n}\right) \leq \log_2\left(\frac{p_1}{p_1} + \cdots + \frac{p_n}{p_n}\right) = \log_2(n)$$

$H(X) \leq \log_2(n)$:



- $\frac{1}{2}\left(\log_2(x_1) + \log_2(x_2)\right)$ $\leq \log_2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

- $p_1 \cdot \log_2(x_1) + p_2 \cdot \log_2(x_2) \leq \log_2(p_1 x_1 + p_2 x_2)$

  si $p_1, p_2 \geq 0$ et $p_1+p_2=1$

- $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log_2(x_i) \leq \log_2\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i\right)$ $(x_i > 0 \ \forall i)$

  si $p_i \geq 0 \ \forall i$ et $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log_2 \underbrace{\left(\frac{1}{p_i}\right)}_{=x_i}$$

$$\leq \log_2\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{1}{p_i}\right) = \log_2\left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$= \log_2(n) \quad \#$$

Encodage de l'information

But: Représenter une séquence de lettres sous forme binaire en utilisant le moins de bits possible.

Ex: IL FAIT BEAU A IBIZA

16 lettres (sans les espaces)

1. code ASCII étendu : chaque lettre est encodée sur 8 bits

→ besoin de $16 \cdot 8 = 128$ bits

2. 16 lettres → utilise 4 bits / lettre

I = 0000, L = 0001, F = 0010, A = 0011, I = 0000 ...

→ $16 \cdot 4 = 64$ bits

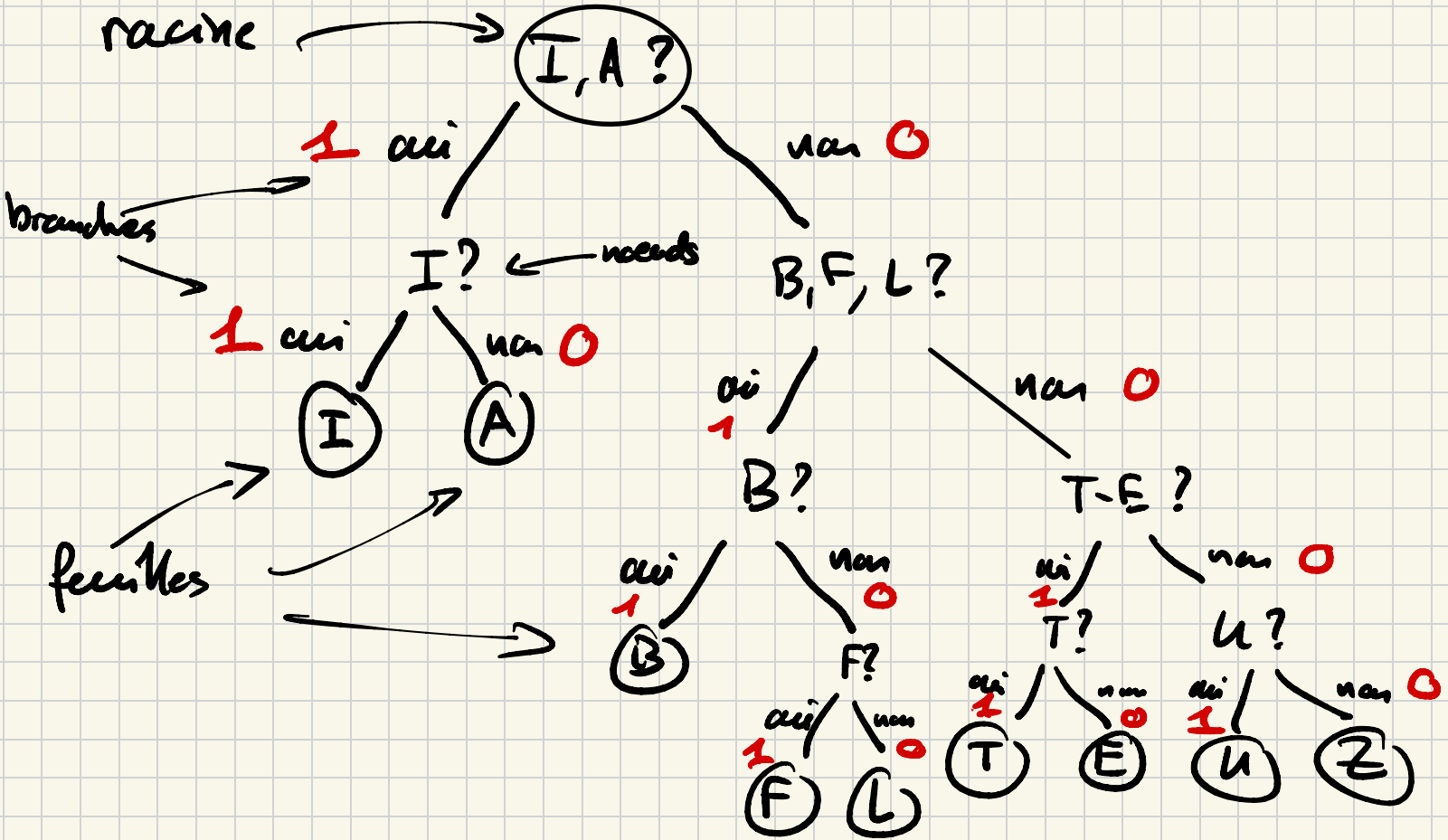
3. 9 lettres différentes

→ aussi 4 bits → aussi 64 bits au total

4. réutiliser notre jeu des questions !

2 principes: • # bits utilisés pour une lettre
= # questions posées pour la deviner

• oui ↔ 1, non ↔ 0


racine
I, A ?
1 oui
non 0
branches
I ? ← noeuds
B, F, L ?
1 oui
non 0
oui
1
non 0
I
A
B ?
T-E ?
feuilles
oui
1
non 0
oui
1
non 0
B
F ?
T ?
U ?
oui
1
non 0
oui
1
non 0
oui
1
non 0
F
L
T
E
U
Z

Code binaire (au dictionnaire) :

I → 11
A → 10
B → 011
F → 0101
L → 0100
T → 0011
E → 0010
U → 0001
Z → 0000

nb total de bits utilisés :

$8 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 4$

$= 16 + 6 + 24 = \underline{\underline{46}}$

- nb de bits moyen par lettre : $\frac{46}{16} = \underline{\underline{2,875}}$

I L F A I T B E A U A I B I Z A

→ on encode ça comme :

11010001011011 0011 ---

↳ si on reçoit ça, qu'en fait-on ?

en lisant depuis la gauche : (avec le dictionnaire)

11 | 0100 | 0110 | 1011 | 0011 ---
I L F A ...

ça fonctionne car aucun mot de code n'est le préfixe d'un autre

La semaine prochaine, nous verrons que

quel que soit (*) le système d'encodage considéré, le nombre moyen de bits utilisés pour lettre $\geq$ entropie de la séquence

(*) pour peu qu'il soit décodable.