Corrigé série 26

Exercice 1 (5 points)

a) On a $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -35 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -15 \\ -14 \end{pmatrix}$.

b) On en déduit que le produit vectoriel n'est pas associatif.

c) Par exemple, si $\vec{a} = \vec{e_1}$, $\vec{b} = \vec{c} = \vec{e_2}$, alors
$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{b}\right) = \vec{a} \wedge \vec{0} = \vec{0}$ et $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = \vec{e_3} \wedge \vec{e_2} = -\vec{e_1}$.

Exercice 2 (3 points)

a) Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors on a

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u_3v_2 - u_2v_3 \\ u_1v_3 - u_3v_1 \\ u_2v_1 - u_1v_2 \end{pmatrix} = -\vec{v} \wedge \vec{u}.$$

b) On a $\vec{e_2} \wedge \vec{e_3} = \vec{e_1}$ et donc $\vec{e_3} \wedge \vec{e_2} = -\vec{e_1}$ par le point a).

Exercice 3 (3 points)

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. D'une part on a

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(v_3 + w_3) - u_3(v_2 + w_2) \\ u_3(v_1 + w_1) - u_1(v_3 + w_3) \\ u_1(v_2 + w_2) - u_2(v_1 + w_1) \end{pmatrix},$$

et d'autre part

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w}) = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2w_3 - u_3w_2 \\ u_3w_1 - u_1w_3 \\ u_1w_2 - u_2w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(v_3 + w_3) - u_3(v_2 + w_2) \\ u_3(v_1 + w_1) - u_1(v_3 + w_3) \\ u_1(v_2 + w_2) - u_2(v_1 + w_1) \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (12 points)

a) Cette aire vaut $\|\vec{b} \wedge \vec{c}\| = \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot |\sin \alpha|$ par un théorème du cours.

b) Soit β l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b} \wedge \vec{c}$.
La hauteur h est égale à la norme de la projection $\vec{a}$' du vecteur $\vec{a}$ sur le vecteur $\vec{b} \wedge \vec{c}$.
On a $\vec{a}' = \dfrac{\vec{a} \bullet (\vec{b} \wedge \vec{c})}{\|\vec{b} \wedge \vec{c}\|^2}(\vec{b} \wedge \vec{c}) = \dfrac{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b} \wedge \vec{c}\| \cos(\beta)}{\|\vec{b} \wedge \vec{c}\|^2}(\vec{b} \wedge \vec{c})$ et donc $h = \|\vec{a}'\| = \|\vec{a}\| \cdot |\cos(\beta)|$.
Ceci peut aussi se voir trigonométriquement : $h = \|\vec{a}\| \cdot |\cos(\beta)|$.

c) Le volume du parallélépipède vaut le produit de l'aire de la base par la hauteur, soit $\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot |\sin(\alpha)| \cdot |\cos(\beta)|$, et la valeur absolue du produit mixte vaut $|[\vec{a}, \vec{b}; \vec{c}]| = |\vec{a} \bullet (\vec{b} \wedge \vec{c})| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b} \wedge \vec{c}\| \cdot |\cos(\beta)| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot |\sin(\alpha)| \cdot |\cos(\beta)|$.

d) $\vec{a} \bullet (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_2c_3 - c_2b_3 \\ c_1b_3 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - c_1b_2 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 + a_2c_1b_3 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3c_1b_2.$

e) On a $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1,$

et on vérifie que c'est bien égal à la quantité du point d).

f) Il suffit de mettre ensemble les résultats des points c) et e).

g) On applique le résultat du point précédent : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.$

h) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = |-40| = 40.$

Exercice 5 (5 points)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$, donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

De plus, $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}$ donc $EFGH$ est un parallélogramme obtenu par translation du parallélogramme $ABCD$. Donc $ABCDEFGH$ est un parallélépipède.

On peut aussi vérifier que ces deux parallélogramme sont les bases d'un parallélépipède puisque

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Par le cours ou l'exercice précédent, le volume de ce parallélépipède est donné par

$$|\overrightarrow{AB} \bullet (\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE})| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = |2 \cdot (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot (-4)| = 18\,[\text{unités}^3].$$

Exercice 6 (3 points)

Rappelons les équivalences suivantes utiles pour décider si quatre points sont coplanaires ou non.

Les points A, B, C, D sont coplanaires. $\iff$ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. $\iff$ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ne forment pas une base de $\mathbb{R}^3$. $\iff$ $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$.

Ici, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$ donc les quatre points ne sont pas coplanaires.

Exercice 7 (3 points)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}$, ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.

On calcule son aire par le théorème du cours : $\sigma(ABCD) = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = 12$.

Exercice 8 (3 points)

Par un théorème du cours, le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -27 \\ 3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, autrement dit au plan contenant A, B et C.

Exercice 9 (7 points)

On utilise la distributivité du produit vectoriel par rapport à l'addition des vecteurs pour obtenir

$$\vec{0} = \vec{a} \wedge (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \underbrace{\vec{a} \wedge \vec{a}}_{=\vec{0}} + \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{0} + \vec{a} \wedge \vec{b} + \underbrace{\vec{a} \wedge \vec{c}}_{=-\vec{c}\wedge\vec{a}} = \vec{a} \wedge \vec{b} - \vec{c} \wedge \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{a}.$$

La dernière égalité s'obtient de la même façon en partant de $\vec{0} = \vec{b} \wedge (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Si $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, on peut former un triangle de côté $\|\vec{a}\|, \|\vec{b}\|$ et $\|\vec{c}\|$ d'angles opposés α, β et γ.
Comme $\|\vec{a}\wedge\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin(\gamma)$, $\|\vec{c}\wedge\vec{a}\| = \|\vec{c}\|\|\vec{a}\|\sin(\beta)$ et $\|\vec{b}\wedge\vec{c}\| = \|\vec{b}\|\|\vec{c}\|\sin(\alpha)$,
avec $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{c}\wedge\vec{a}=\vec{b}\wedge\vec{c}$, on obtient $\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin(\gamma) = \|\vec{c}\|\|\vec{a}\|\sin(\beta) = \|\vec{b}\|\|\vec{c}\|\sin(\alpha)$.
Par une division par $\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,\|\vec{c}\|$, on retrouve le théorème du sinus dans un triangle quelconque :

$$\frac{\sin(\gamma)}{\|\vec{c}\|} = \frac{\sin(\beta)}{\|\vec{b}\|} = \frac{\sin(\alpha)}{\|\vec{a}\|}$$

Exercice 10 (6 points)

a) $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$. Par un théorème du cours,

$$V(ABCD) = \left|\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\1 & 3 & 3\\3 & 3 & 2\end{vmatrix}\right| = |2\cdot3\cdot2+1\cdot3\cdot3+(-1)\cdot1\cdot3-(-1)\cdot3\cdot3-2\cdot3\cdot3-2\cdot1\cdot1| = 7.$$

b) Le volume du tétraèdre $V_t = \frac{1}{6}\,V(ABCD) = \frac{7}{6}$.

c) L'aire vaut la moitié de la somme des aires des parallélogrammes construits sur les paires $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$, $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})$, $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.
On utilise alors la formule de l'aire du parallélogramme du théorème du cours :

$$\frac{1}{2}\,(\|\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DA}\| + \|\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DA}\| + \|\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DB}\| + \|\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}\|) = \frac{\sqrt{21}}{2} + \sqrt{70} + \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 11 (5 points)

a) $(\vec{b}-\vec{a})\wedge(\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{b}-\vec{a})\wedge\vec{a} + (\vec{b}-\vec{a})\wedge\vec{b} = \vec{b}\wedge\vec{a} - \vec{a}\wedge\vec{a} + \vec{b}\wedge\vec{b} - \vec{a}\wedge\vec{b} = 2\vec{b}\wedge\vec{a}$.

b) Les vecteurs $\vec{a}+\vec{b}$ et $\vec{b}-\vec{a}$ représentent les deux diagonales du premier parallélogramme. L'aire du parallélogramme construit sur ces deux diagonales vaut $\|(\vec{b}-\vec{a})\wedge(\vec{a}+\vec{b})\| = 2\|\vec{b}\wedge\vec{a}\|$, qui est bien le double de l'aire du premier parallélogramme.

Exercice 12 (5 points)

Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. D'une part,

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}b_2c_3-c_2b_3\\c_1b_3-c_3b_1\\b_1c_2-c_1b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2(b_1c_2-c_1b_2)-a_3(c_1b_3-c_3b_1)\\a_3(b_2c_3-c_2b_3)-a_1(b_1c_2-c_1b_2)\\a_1(c_1b_3-c_3b_1)-a_2(b_2c_3-c_2b_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2b_1c_2-a_2c_1b_2-a_3c_1b_3+a_3c_3b_1\\a_3b_2c_3-a_3c_2b_3-a_1b_1c_2+a_1c_1b_2\\a_1c_1b_3-a_1c_3b_1-a_2b_2c_3+a_2c_2b_3\end{pmatrix},$$

et d'autre part,

$$(\vec{a}\bullet\vec{c})\cdot\vec{b}-(\vec{a}\bullet\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix}(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1\\(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_2\\(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_1\\(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_2\\(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2c_2b_1+a_3c_3b_1-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1\\a_1c_1b_2+a_3c_3b_2-a_1b_1c_2-a_3b_3c_2\\a_1c_1b_3+a_2c_2b_3-a_1b_1c_3-a_2b_2c_3\end{pmatrix},$$

d'où l'égalité.

Exercice 13 (5 points)

La base $(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$ n'est pas directe, ce qui signifie que le déterminant $|\vec{f_1}\vec{f_2}\vec{f_3}|$ est négatif.
Ce déterminant est égal à $f_{11}f_{22}f_{33}+f_{12}f_{23}f_{31}+f_{13}f_{21}f_{32}-f_{31}f_{22}f_{13}-f_{32}f_{23}f_{11}-f_{33}f_{21}f_{12}$.

a) $\det(\vec{f_1},\vec{f_2},-\vec{f_3}) = -\det(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$ car un coefficient $-f_{i3}$ change le signe de chacun des termes de la somme ci-dessus. Donc la base $(\vec{f_1},\vec{f_2},-\vec{f_3})$ est directe.

b) $\det(\vec{f_1},\vec{f_3},\vec{f_2}) = f_{11}f_{23}f_{32}+f_{13}f_{22}f_{31}+f_{12}f_{21}f_{33}-f_{31}f_{23}f_{12}-f_{33}f_{22}f_{11}-f_{32}f_{21}f_{13}$ qui est à nouveau égal à l'opposé du déterminant de $(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$. Donc la base $\vec{f_1},\vec{f_3},\vec{f_2})$ est directe.

c) On remarque que $\det(\vec{f_3},\vec{f_1},\vec{f_2}) = \det(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$, donc la base $(\vec{f_3},\vec{f_1},\vec{f_2})$ n'est pas directe.

Exercice 14 (7 points)

a) Faux car $\vec{a}\wedge\vec{a}=\vec{0}$ quel que soit $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$.

b) Faux, le déterminant de la matrice $\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}$ vaut -1.

C'est la valeur absolue du déterminant qui détermine le volume d'un parallélépipède.

c) Vrai. Si les quatre vecteurs sont coplanaires, alors $\vec{a}\wedge\vec{b}$ et $\vec{c}\wedge\vec{d}$ sont tous les deux des vecteurs normaux au plan formé par $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$. Ainsi $\vec{a}\wedge\vec{b}$ et $\vec{c}\wedge\vec{d}$ sont colinéaires.
Ainsi le produit $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d}) = \vec{0}$.

d) Faux, par exemple, $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right)\wedge\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\vec{0}$ pourtant ces quatre vecteurs ne sont pas coplanaires.

e) Vrai car $\vec{a}\bullet\vec{b}$ est un scalaire et donc $(\vec{a}\bullet\vec{b})\cdot\vec{c}$ est le produit d'un vecteur par un scalaire, donc c'est un vecteur.

f) Faux, ce produit n'existe pas ; on peut effectuer le produit vectoriel uniquement entre deux vecteurs, or $\vec{b}\bullet\vec{c}$ est un scalaire et non un vecteur.

g) Vrai, $\vec{b}\wedge\vec{c}$ est un vecteur, disons $\vec{b}\wedge\vec{c}=\vec{d}$, et donc $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{a}\wedge\vec{d}$ est un vecteur.