Corrigé Test 5 - Intégration 30 avril 2025

Le test dure 105 minutes. Les réponses doivent être rédigées de manière claire sur une feuille séparée.

Exercice 1. *(6 points)*

On considère la fonction $f : [0;2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(2) = 0$ et $f(x) = 1$ pour tout $x < 2$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$ en utilisant les sommes de Darboux.
Utiliser une subdivision quelconque et préciser les valeurs de $s_\sigma(f)$, $S_\sigma(f)$, $s(f)$ et $S(f)$.
On choisit une subdivision quelconque $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 2$. Alors

$$\begin{aligned}
s_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = 1 \cdot (x_1 - x_0) + 1 \cdot (x_2 - x_1) + \ldots + 0 \cdot (x_n - x_{n-1}) \\
&= x_{n-1} - x_0 = x_{n-1}; \\
S_\sigma(f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = 1 \cdot (x_1 - x_0) + 1 \cdot (x_2 - x_1) + \ldots + 1 \cdot (x_n - x_{n-1}) \\
&= x_n - x_0 = 2 - 0 = 2; \\
s(f) &= 2 \text{ et } S(f) = 2;
\end{aligned}$$

car x_{n-1} peut être choisi arbitrairement proche de 2. Ainsi, $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = 2$.

Exercice 2. *(3 points)*

Enoncer le théorème de la moyenne.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe alors un élément c de $[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a).$$

Exercice 3. *(5 points)*

Calculer le réel $a > 0$ de façon que l'aire du domaine limité par les courbes $y = x^2$ et $y = ax$ soit égale à 36.
On commence par chercher les points d'intersection :

$$x^2 = ax \Leftrightarrow x^2 - ax = 0 \Leftrightarrow x(x-a) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } x = a.$$

Comme $ax > x^2$ si $x \in [0;a]$, l'aire du domaine est donné par

$$\int_0^a (ax - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a = \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{6}a^3$$

Ainsi, on a $\dfrac{1}{6}a^3 = 36 \Leftrightarrow a^3 = 216 \Leftrightarrow a = 6$.

Exercice 4. *(17 points)*

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 5x \cdot \sin(x^2) \Rightarrow F(x) = -\dfrac{5}{2}\cos(x^2) + c,\ c \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{3x^2+5}} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{4}(3x^2+5)^{\frac{2}{3}} + c,\ c \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 5}{x^3}$

Par la division euclidienne, on a $\dfrac{x^3-3x^2-5}{x^3} = 1 - \dfrac{3x^2+5}{x^3} = 1 - \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{x^3} = 1 - \dfrac{3}{x} - 5 \cdot x^{-3}$, dont les primitives sont données par

$$F(x) = x - 3\ln(|x|) + \frac{5}{2x^2} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

d) $f(x) = \dfrac{4x-1}{x^2-2x-8}$ (décomposition en éléments simples)

On commence par décomposer en éléments simples la fraction :

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{4x-1}{(x-4)(x+2)} = \frac{a}{x-4} + \frac{b}{x+2} = \frac{ax+2a+bx-4b}{(x-4)(x+2)}$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 2a-4b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

On a donc $\dfrac{4x-1}{x^2-2x-8} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{x-4} + \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{x+2}$, dont les primitives sont données par

$$F(x) = \frac{5}{2}\ln(|x-4|) + \frac{3}{2}\ln(|x+2|) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

e) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4x+8}$ (complétion de carré)

On a

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+8} = \frac{2x+1}{(x-2)^2+4}$$

En posant $u = x-2$, on obtient

$$\frac{2u+5}{u^2+4} = \frac{2u}{u^2+4} + \frac{5}{u^2+4} = \frac{2u}{u^2+4} + \frac{5}{4}\frac{1}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1},$$

dont les primitives sont $\ln(|u^2+4|) + \dfrac{5}{4} \cdot 2\arctan\left(\dfrac{u}{2}\right)$.

Ainsi, $F(x) = \ln(|x^2-4x+8|) + \dfrac{5}{2}\arctan\left(\dfrac{x-2}{2}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. *(21 points)*

a) Calculer l'intégrale suivante avec un changement de variables : $\displaystyle\int_1^5 (x+2)\sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x$ On pose $t = \sqrt{2x-1}$, donc $\varphi(t) = x = \dfrac{t^2+1}{2}$ et $\varphi'(t) = \dfrac{2t}{2} = t$. De plus, si $x \in [1;5]$, alors $t \in [0;3]$. On a donc

$$\int_1^5 (x+2)\sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{t^2+5}{2} \cdot t \cdot t\,\mathrm{d}t = \int_1^3 \frac{t^4}{2} + \frac{5t^2}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^5}{10} + \frac{5t^3}{6}\right]_1^3$$

$$= \frac{243}{10} + \frac{135}{6} - \frac{1}{10} - \frac{5}{6} = \frac{688}{15}.$$

b) Calculer l'intégrale suivante par partie : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

On pose $u' = \cos(x)$, $u = \sin(x)$, $v = x$, $v' = 1$. On calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,\mathrm{d}x &= [x\sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\mathrm{d}x = [x\sin(x)+\cos(x)]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot 1 + 0 - 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

c) Calculer l'intégrale suivante en appliquant le changement de variables $x = e^t$, puis en utilisant l'intégration par parties :

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

On pose $x = \varphi(t) = e^t$, donc $\varphi'(t) = e^t$. Si $x \in [1;e]$, alors $t \in [0;1]$. On calcule alors

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{t}{(e^t)^2}\cdot e^t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t}{e^t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 te^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On pose $u' = e^{-t}$, $u' - e^{-t}$, $v = t$, $v' = 1$ et on obtient

$$\begin{aligned}\left[-te^{-t}\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot(-e^{-t})\,\mathrm{d}t = \left[-te^{-t}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left[-te^{-t} - e^{-t}\right]_0^1 \\ &= -e^{-1} - e^{-1} - (0-1) = 1 - \frac{2}{e}\end{aligned}$$

d) Calculer, si possible, l'intégrale généralisée suivante : $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{+\infty} x\cdot(x^2+1)^{-2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_{-1}^{+\infty} \\ &= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-1}{2(t^2+1)}\right) - \frac{-1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Exercice 6. *(4 points)*

Calculer la longueur de la courbe de la fonction $f(t) = \cosh(t)$ sur l'intervalle $[0;1]$.

On a $f'(t) = \sinh(t)$ et $1 + f'(t)^2 = 1 + \sinh(t)^2 = \cosh(t)^2$. Comme le cosinus hyperbolique est positif sur $[0;1]$, la longueur de la courbe est égale à

$$\int_0^1 \sqrt{\cosh(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \cosh(t)\,\mathrm{d}t = [\sinh(t)]_0^1 = \frac{e - e^{-1}}{2} - \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{e^2-1}{2e}.$$

Exercice 7. *(7 points)*

Déterminer le minimum global de la fonction $\quad f(x) = \displaystyle\int_{e^x}^{e^{2x}} t^3\,\mathrm{d}t.$

On utilise la formule vue en cours :

$$f'(x) = \left(e^{2x}\right)^3\cdot e^{2x}\cdot 2 - (e^x)^3\cdot e^x = 2e^{8x} - e^{4x} = e^{4x}(2e^{4x}-1).$$

On a $f'(x) = 0$ si $e^{4x} = \dfrac{1}{2}$, donc $x_0 = \dfrac{-\ln(2)}{4}$ est un candidat. On calcule la dérivée seconde

$$f''(x) = 16e^{8x} - 4e^{4x} = 4e^{4x}(4e^{4x}-1) \text{ et } f''(x_0) = 2 > 0$$

Ainsi, $x_0 = \dfrac{-\ln(2)}{4}$ est un minimum local de la fonction.

C'est le minimum global car il n'y a pas d'autres candidats.